

第4回 力学基礎1

教科書 金子公宥、福永哲夫編、バイオメカニクス、杏林書院 第6章

ニュートンの運動法則、力、トルク、位置、速度、加速度、仕事、パワー

4.1

我々が取り扱うスポーツバイオメカニクスでは、ニュートンの古典物理程度の知識があればたいていは通用する。そこで今一度ニュートンの運動に関する法則をおさらいしておくことにしよう。

4.1.1 第1法則：慣性の法則

物体は力を受けなければ同じ速度で動きつづけるか、止ったままである

力が作用しなければ物体はそこにとどまり続ける、あるいは同じ速度（速度はベクトルなので、同じ速さと向き）で運動をし続ける、ということである。逆にいえばとどまったままか、同じ速度で運動をし続けているならば力が作用していない、ということになるがこれは正しくはない。力を受けていてもそれがつりあいの条件にある場合、には留まっている場合もあり、また同じ速度で動き続けることもある。

4.1.2 第2法則：運動の法則

物体は力をうけるとその力に比例した加速度で運動を行う

$F = ma$ であらわされる運動の法則である。力 F および加速度 a はベクトル、すなわち大きさと向きを持っていることに注意しておくことは言うまでもない。式を変形して眺めてみると、 $a = \frac{F}{m}$ なので、同じ力を作用させたとしても得られる加速度は物体の質量に反比例していることから、質量は「運動のしにくさ」を表していると言える。すなわち運動を妨げる抵抗と考えてもよい。

4.1.3 第3法則：作用反作用の法則

物体が力をうけるとき、力を及ぼした物体は同じ大きさで逆方向に力を受ける

ラグビーでスクラムを組んでいる2つのチームがあるでしょう。ぶつかり合うお互いのチームが均衡している場合には、ぶつかり合っているところで押し合う力がつりあっている。すなわちAチームがBチームから受けるのと同じ力をBチームはAチームから受けていることになる。

これら3つの法則はこれから展開される運動の話のなかで最も基礎的な事項であり、実際のスポーツ中の運動、ヒトの運動に限らず、スポーツ用具とヒトとの関連もニュートンの運動法則の範疇によって語られるため忘れてはいけない。

4.2 運動の定義

4.2.1 運動のモデル

物体の運動を取り扱う時に、それはいったいどのような「もの」なのかを考えると形や色や質量、肌ざわりなどいろいろと特徴づけることができようが運動を記述する際、ニュートンの古典力学を適用しようとするには基本的に重要なものは質量である。

大きさを無視して、質量だけが存在する仮定の点を考えたとき、これを質点 (particle) と名づける。遠い宇宙に存在する星も、宇宙の大きさに比べればその大きさはとるに足らないので、大きさを無視し質量だけが存在すると仮定するのである。

スポーツでも陸上競技を上空高くから見下ろせば、豆粒のような選手がトラックをぐるぐるとまわっている様子を観察することができるが、これも質点として考えてよい。

二つ以上の質点を考えるとき、これを質点系 (system of particles) とよぶ。たとえば二つの星の運行を記述する場合にも、質点が二つある、とみなして問題を考えていく。ここでも星の大きさは無視されて質量だけが問題となる。水の流れや空気の流れも微小な粒子の運動であって、その粒子の回転運動をほぼ無視してもよいことから質点系とみなせる。

剛体 (rigid body) とは変形しない固体である。すなわち固体内の任意のどの点においても相互の距離が変化しない。「固い」という意味ではないことに注意しなければならない。

ヒトの運動を記述する場合に、筋骨格モデルというモデルで解析やシミュレーションを行う場合があるが、この際各セグメント (大腿や下腿など) は剛体とみなす。

4.3 座標系

物体の運動を記述する際には、座標系 (coordinate system) が必要とされる。いくつかの呼び方があるが、ここでは地球に固定された座標系のことを、基準座標系 (standard coordinate system) とよび、運動する物体に固定された座標系のことを、物体座標系 (body fixed coordinate system) と呼ぶことにする。前者を絶対座標系 (absolute coordinate system)、後者を局所座標系 (local coordinate system) と呼ぶこともある。

座標系が定義されたら、三次元空間上の物体の位置はベクトルによってあらわすことが可能となる。図 4.1 では基準座標系 Σ_0 であらわされる空間において、物体座標系 Σ_b がおかれている。このとき Σ_b の原点 O_b の位置座標は、 Σ_0 からみたベクトル、 p_{Ob} であらわされている。空間におかれた、 p の位置座標は、この p_{Ob} と、 Σ_b からみた点 p の位置ベクトル、 p_b を使って、

$$p_0 = p_{Ob} + p_b \quad (4.1)$$

と書くことができる。ここで点 p の位置ベクトルは、ベクトル表記によってその Σ_0 座標系における成分、 (x, y, z) をつかって表せば、

$$p_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

と書ける。文章中にこの表記で記述することは紙面がもったいないので、以降は、 $p_0 = (x, y, z)^T$ と書くことにする。与えられた座標系のなかでの位置ベクトルを記述する方法がわかったところで、高校数学でもでてきたベクトルの基本演算法則を振り返ってみる。ふたつのベクトルが等しいことは以下で表す。すなわち大きさと向きが等しいことを意味する。

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \quad (4.3)$$

2つのベクトル、 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ との和、 $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ とは $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のつくる平行四辺形の対角線を意味する。図を書いてみればわかるが対角線を形づくればよいので、 $\mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ は自明である。つまりベクトルの和には交換法則がなりたつ。またここから導き出されるものにはベクトルの差がある。 $\mathbf{b} - \mathbf{a} = \mathbf{b} + (-\mathbf{a})$

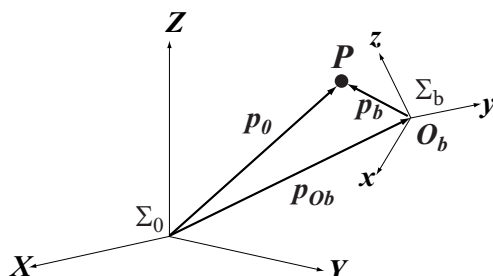


図 4.1: 基準座標系 Σ_0 と物体座標系 Σ_b

4.4 位置・速度・加速度

4.4.1 方向余弦

位置をベクトルで表し、その表記方法をおさらいしたが、直交する座標系 ΣXYZ において、ベクトル $\mathbf{a}$ の大きさを a であらわし、 x, y, z 軸の成分を (a_x, a_y, a_z) とする。このとき、

$$\begin{aligned} a_x &= a \cos \alpha = al \\ a_y &= a \cos \beta = am \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$a_z = a \cos \gamma = an \quad (4.5)$$

であらわされる。 α, β, γ はそれぞれ、ベクトル $\mathbf{a}$ が x 軸, y 軸, z 軸となす角度であり、

$$\begin{aligned} l &= \cos \alpha \\ m &= \cos \beta \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$n = \cos \gamma \quad (4.7)$$

を方向余弦 (direction cosine) とよぶ。 $a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a^2(l^2 + m^2 + n^2)$ であるから

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (4.8)$$

である。これからわかることは任意のベクトル $\mathbf{a}$ は大きさが a とその方向の長さ 1 の単位ベクトル $\mathbf{e}_a$ の積であらわされる。ベクトル、 $\mathbf{e}_a$ はベクトルの方向を決定するものであり、単位ベクトル (unit vector) とよぶ。

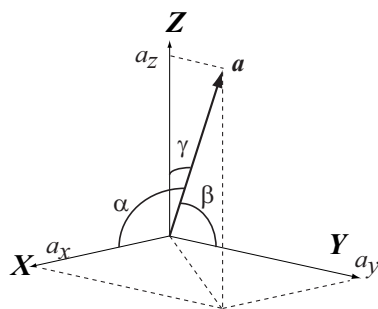


図 4.2: 方向余弦

4.4.2 位置から速度

座標系がきまって位置を記述するベクトルの表記がわかったところで、次は速度と加速度についてもおさらいしておく。位置ベクトル点 P が時間 δt 後に点 Q の位置まで移動したとする。このときの位置ベクトルの変化は、 δr とする。この δr の x 軸方向成分 δx と y 軸方向成分 δy であるとするれば、それぞれの軸方向の速度は、 $\frac{\delta x}{\delta t}$ および、 $\frac{\delta y}{\delta t}$ である。したがって速度ベクトル $v = (\frac{\delta x}{\delta t}, \frac{\delta y}{\delta t})$ である。ベクトル $\mathbf{v} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ ともかける。

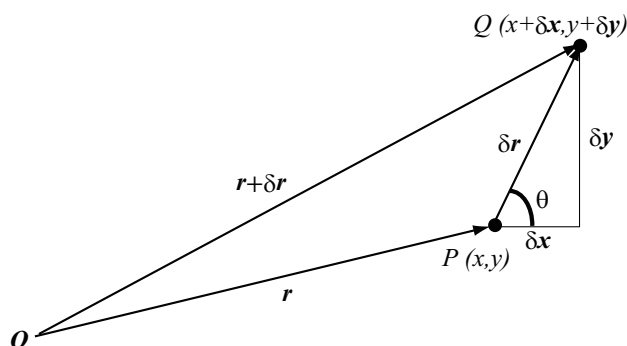


図 4.3: 速度ベクトルの定義

4.4.3 速度から加速度

速度ベクトルを考えたときと同様に、加速度ベクトルは速度ベクトルが微小時間 δt 秒後に $\delta \mathbf{v}$ だけ変化したと考えて以下のように同じ手順で考えることができる。

$$\begin{aligned}
 a_x &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta v_x}{\delta t} = \frac{dv_x}{dt} \\
 a_y &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta v_y}{\delta t} = \frac{dv_y}{dt} \\
 \mathbf{a} &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

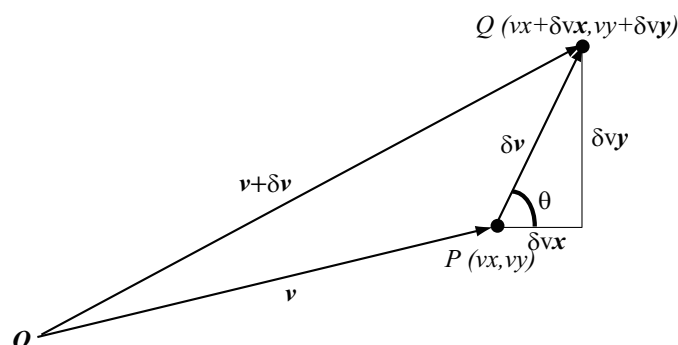


図 4.4: 加速度ベクトルの定義

4.5 回転運動

4.5.1 角度・角速度・角加速度

物体が円運動、あるいは回転運動を行っている場合には角度変化が生じる。角度を θ であらわすと、微小時間 δt 後に $\theta + \delta\theta$ となったとき、その速度 $\omega = \dot{\theta} = \frac{\delta\theta}{\delta t}$ とかける。同様に角速度の微小変化分 $\delta\omega$ から角加速度を得るには、 $\dot{\omega} = \ddot{\theta} = \frac{\delta\omega}{\delta t}$ とすればよい。

回転運動についての角度・角速度・角加速度や極座標系については、次々回で説明を行う予定。

4.6 離散時間系における速度・加速度の算出

離散時間系とは、「とびとび」の時間のことである。そもそもある時刻 t の次の時刻はいつかと問われても連続している時間には「次」なる値を見つけるのは困難である。そこでわれわれは、時間を「とびとび」の値として物理データを計測するのである。ある時刻 t の微小時間ののちは、 $t + \delta t$ などとする。これを離散時間とよぶ。

実際に計測されたデータには、離散時間としてのタイムスタンプがついているか計測開始からの時間がわかるようになっているのが物理計測の基本である。したがって時刻 t のときの点 P の位置座標が r で δt 後の位置が $r + \delta r$ であればそのときの平均の速度はさきほど算出したように $v = (\frac{\delta x}{\delta t}, \frac{\delta y}{\delta t})$ となる。この平均の速度は、移動した時間 δt の半分の時間における速度にほかならない。したがって計測したデータ t 秒のときの速度を求めようとすると、これではまずい。そこで、 $t - \delta t, t + \delta t$ の時刻 t をまたぐ時間の間に移動した位置ベクトルの差分から速度を求める。

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}(t + \delta t) - \mathbf{r}(t - \delta t)}{2\delta t} \quad (4.10)$$

として求める。

例題:位置座標から速度を求める

離散時間系のデータの例として得られた実験データから速度を算出することを試みてみよう。表 4.6 のデータから、速度を求めよ。

表 4.1: スクワット中の腰関節鉛直方向位置座標

時刻 (s)	0	0.16	0.32	0.48	0.6	0.72	0.88	1.04	1.2	1.36	1.52	1.68
Y 座標 (m)	788.0	785.1	757.0	701.4	628.6	570.1	535.7	527.1	542.0	610.3	708.9	778.8

例題：区間記録から泳速度を求める

以下のデータは、仰木が携わる (財) 日本水泳連盟医科学委員会レース分析プロジェクトにおいて実際に競技会で取得した選手の詳細なレース記録である。これをもとにして区間速度 (すなわち、その区間の平均速度を求めよ)。この場合、データ数が多くない、さらには区間といってもかなりの距離と時間幅があるために、前後の位置座標データ・時刻データを用いなくても構わない (本当はあまりよいこととは言えないが、無数の地点のデータを採用することは事実上不可能なので通常われわれはそのように処理してしまっている)。

表 4.2: 競泳 100m レースのペース

距離 (m)	15	25	45	50	60	75	95	100
時刻 (s)	5.98	11.35	21.71	24.42	27.64	37.21	48.28	50.80

4.7 力

ここでは、スポーツに限らず運動の意味を広くとらえて、物体の運動を考えると最初に説明したように、宇宙空間の星の運行までも含まれる。ひとつひとつの現象を説明づけるために、モデルという考え方を心がけよう。運動をモデル化するにここでは力学 (mechanics) をつかう。力学といっても幅広くとても網羅できないがスポーツバイオメカニクスで用いる力学は古典力学の基礎であり、高校数学と高校物理の延長と考えてくれればよい。場合によっては高校の物理の知識で十分に理解可能な現象もある。

スポーツ運動では、特に身体に作用する力 (地面反力, 手先接触力, 関節間力, 関節トルク, etc) や、用具に作用する力 (打撃力, 路面との摩擦力, etc.) などが問題となる。

4.7.1 重力

地球上のあらゆる物体には重力が作用している。すでに出てきたニュートンの運動方程式、 $F = m\alpha$ の α が加速度を示すが、地球上の物体はすべて地球の中心にむけて (つまり地面に鉛直に), $g = -9.8(m/s)$ の大きさで引っ張られている。符号は鉛直上向きを正とした場合である。

この重力は、ヒトの体の「重心 (center of gravity : CG) に作用すると考えることができ、且つ重心にはたらく重力はかなり大きいといえるため、ヒトの運動を考えるうえで重力の成分は非常に重要である。

4.7.2 弾性力

バネの力、である。弾性力はフックの法則 (Hook's Law) でモデル化できる。引っ張られたバネは引っ張られた長さ (伸び) に比例する力で戻ろうとする。比例定数 k のことをバネ定数とよぶ。

弾性力はランニング中のシューズと地面との反発や、ボールの反発などで出てくるが用具とヒトの運動を記述するうえで重要である。

4.7.3 張力

物体を紐やロープで引っ張れば、そこには張力 (tension) が働いていることになる。紐やロープの張力は実際には弾性力であるが、ほぼ長さが変わらないという仮定の下で、紐・ロープの質量を無視して説明することが多い。

綱引きをしている二つのクラスの間には張られたロープには張力が働いているが、お互いのクラス間では正反対の方向に同じ大きさの力の張力が働いていることになる。

4.7.4 垂直抗力

物体が地面に水平に置かれた場合、重力と釣り合ってその物体をとどめている力は地面から上向きに作用する、垂直抗力である。地面と垂直な方向がこの場合は鉛直上向きなので、重力と釣り合うが、徐々に水平面が傾いて傾斜をもってくるとこの向きは斜面と垂直であるが、重力の向き (鉛直) とは異なる向きになる。ここでいう垂直抗力とは地面に対する垂直方向の力である。

この垂直抗力は次に述べる摩擦力と大いに関係するので、摩擦を考えるうえでは地面の傾斜が関係してくる。

4.7.5 摩擦力

地面に置かれた物体を水平方向に動かそうとすると、氷の上ならスーッと動くがアスファルトではそうはいかない。つまり摩擦がそこには働いている。摩擦力は物体が触れ合っている境界面の状態、すなわち「ざらざら」感や「すべすべ」感ということばで代表される表面の素材などに影響を受ける。

この摩擦力 F' は垂直抗力 F_N に比例するので、この比例定数を μ とおき、 $F' = -\mu F_N$ と表現する。このとき μ は静止状態と運動している状態で大きく異なることがほとんどであり、前者のときの摩擦係数を静摩擦係数、後者を動摩擦係数とよんで区別する。式に負の符号がついているのは運動方向とは逆向きに摩擦力が作用するためである。

4.7.6 抵抗

空気や水といった流体中に受ける力のことを抵抗 (drag) とよぶ。

これは流体中にある物体の形状、および流れに垂直な断面での横断面積、流体の密度等に関係するが、流体中ではおおむね流れの速度の二乗に比例する抵抗が生じる。すなわちほんのわずかに速度アップを図ろうと思って水泳選手が頑張ろうとすると、二乗に比例する大きさの推進力を同時に発揮する必要がある。

4.8 運動量

大きな相撲選手が突進してくる場合と、小柄な女子マラソン選手が突進してくる場合を考えてみると、「運動の勢い」がありそうなのは前者の相撲取りであろう。物体の質量と速度を掛け合わせたものを運動量 (momentum) とよぶ。

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (4.11)$$

この式の左辺は運動量であるが両辺を微分すると、

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (4.12)$$

が導き出される。つまり運動量の変化は作用した力によるわけである。逆にいえば力が作用しない時には運動量は変化しない。これを運動量保存則 (conservation of momentum) という。

運動量保存則は、ボールとバットといった物体の衝突現象を考える際によく用いられる。現実世界には物体の衝突などで運動量保存則が厳密に成り立つことはないといえるが、おおむねそのように考えても差し支えない。

4.9 仕事・パワー

スクワットマシン、ベンチプレスマシンなどでトレーニングを行う場合、重りのプレート数枚がワイヤーで上に向かって引っ張り上げられる。マシンの機構によってヒトが動かす部位やその方向はいろいろと変わるが、トレーニングマシンの多くはこのように重量挙上型である場合が多い。このとき持ち上げた重量 (質量) m と作用する重力加速度と積は、ワイヤーが重りを引っ張る力 F であることはすでに説明した綱引きと同じである。この力 F と持ち上げた距離 (高さ) s の積は、

$$W = \mathbf{F}s \quad (4.13)$$

であらわされる。 W を仕事 (work) とよぶ。または仕事のエネルギーともよぶ。単位は、力 ($F[\text{N}]$) と距離 ($s[\text{m}]$) であるので、 $[\text{Nm}]$ となり、これを別の呼称でジュール (J) とよぶ。なお、仕事 W はスカラーである。

上の式をみてわかるように、移動距離 s の積として仕事はあらわされるために移動を伴わない場合には仕事は 0 であることに注意しなければならない。アイソトニックトレーニング (等尺性運動, isometric training) と呼ばれているトレーニングでは、動かない物体を押したり引いたりしていることからこの場合、仕事は 0 である。

登山など自身の体を高い所に持ち上げるような運動では、重力に対してなした仕事は鉛直方向分の高さのみが仕事に関係するため、直登攀しようがつつら折りで登ろうが、どのようなルートをたどっても山頂にたどり着くまでになした仕事は等しい。

参考文献

- [1] Kingston Bernard, 足立和隆訳. よくわかる筋の機能解剖. メディカルサイエンス・インターナショナル, 2000.
- [2] Thompson Floyd, 中村千秋, 竹内真希. 身体運動の機能解剖 (Manual of Structural Kinesiology). 医道の日本社, 1997.
- [3] 佐伯由香, 黒澤美枝子, 細谷安彦, 高橋研一編訳 (編). トートラ 人体解剖生理学 原書 6 版. 丸善, 2004.