第5回　力学基礎2

教科書 金子公宥、福永哲夫編、バイオメカニクス、杏林書院 第 6 章

剛体の運動、運動方程式、摩擦

5.1　剛体

前回も述べたが、運動を考えるとき我々はその運動現象をさまざまな意味でモデル化する。力学的な現象であれば、質点、質点系、剛体といった要素でモデル化できる。モデルとはすなわち現象の簡略化であるので、どのモデルを用いればよいか、についてはそれぞれの問題が求める結果によって適宜変えればよい。

ここではスポーツバイオメカニクスでよく用いられる剛体モデルを中心にして運動のモデルについて説明する。剛体はすでに説明したように物体内の任意の点同士の距離が不変であるものをさす。身体運動では筋骨格系モデルのなかで骨格をこの剛体モデルで説明する。運動中にわずかに変形する場合でもそれを微小とみなして変形しない剛体と考えるわけである。

5.1.1　重心

物理的な意味での重心とは直感的には以下の実験で理解される。定規を用意しよう。定規の両端の下を人さし指で支えて、静かに両方の指を中心に向けて動かす。徐々に動かしていくとちょうど定規が水平に保たれたまま、両手の指が中心で止まる。ここが定規の中心、すなわち重心である。次に，シーソーで考えてみる．やじろべえといってもよい．以下の図ではつりあいは取れていて真ん中で支えることができる．

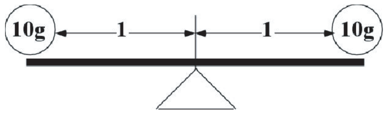

図 5.1: シーソー

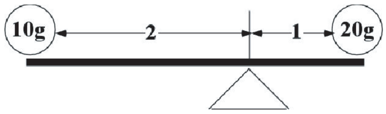

図 5.2: シーソー，その 2

図 4.2 のように錘の重さが異なるとすれば，どうなるかはすぐにわかる．釣り合いの取れるところまで支点を動かすと、腕の長さは 2 対 1 になるだろう。小学校ではこれを、左のおもり×左の腕の長さ＝右のおもり×右の腕の長さと式で表して、これが等しくなるように腕の長さ、あるいはおもりの重さを調節すれば釣り合うということを学んだ。重りとシーソー自身が一体であると考えると支点の位置が**重心**ということになる。質量分布が均一でない定規を持ってきた場合にも、その支点から見て左側、右側の重さ×腕の長さの積は等しい。このような点が重心である。つまり、重心で物体を支えるならばその物体は回転を起こさずに姿勢を保ったままで保持できるのである。

すなわち、その点で物体全体の質量を支えているのと同じことであるといえる。地球上のあらゆる物体はその物体を構成する全ての部分（分子、原子）について地球の中心に向かう重力の作用を受けている。この重力は力の方向がいずれも平行で同じ向きに働いているとみなして差し支えな

い。このように平行に働く力はこれを一点に合成することが可能である。この合成点は物体の位置にかかわらずに剛体では常に同一の点を示す。この点のことを重心または質量中心と呼ぶ。重心はその物体に働く重力の合力の作用点であるというだけではなく、その物体が運動をするときの代表点としても重要な意味をもっている。数学的定義は以下のように書くことができる．3 次元であれば Z 座標も同様.

$$x_{CG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \tag{5.1}$$

$$y_{CG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \tag{5.2}$$

ベクトルの内分

重心を求めるにはベクトルの内分に関する知識が必要である。高校数学の「代数・幾何」では位置ベクトルの内分点を求めるための式が出てきた。線分 AB を m:n の比に内分する点を P として、点 A, B, P の位置ベクトルをそれぞれ図であらわすと次のようになる．

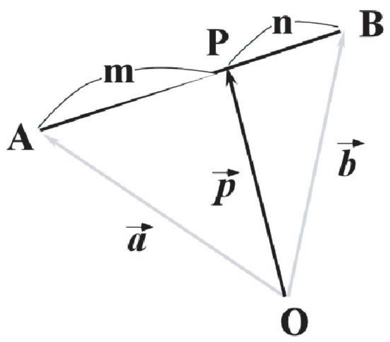

図 5.3: ベクトルの内分点

これを身体の部位における質量の分布で考えると次のような図で説明できる．

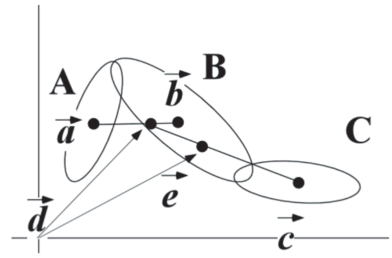

図 5.4: セグメントの質量分布で考える

身体各部、すなわち頭部、胴体部、上腕部などのセグメントごとに重心位置を求める。これらの重心位置をもとにして隣り合うセグメントの合成重心を求めていく。これを繰り返すことにより、身体全体の重心位置を求めるというものである。

まず A の重心位置と B の重心位置を求め、その内分点である D をもとめ、さらに D と C の重心とを合成して 3 つのセグメントの合成重心位置 (a) を算出するということを上の図は示している。同じような密度であれば上の図では A よりも B の方が大きいので当然 B のセグメントの方が

質量が大きい。つまり合成重心位置は B により近い位置にくる。従って、さきのやじろべえ（シーソー）のときのようにこの合成重心位置を支えることで A と B の双方を回転させずに保持できる。しかしながら、図をみると気がつくと思うが A と B の角度が少づつ広がると合成重心位置は A と B のどちらにも存在せずに双方のセグメントの外に出てしまう。つまり重心は仮想の点であるので、セグメント内に存在しないこともあるわけである。最初に重心の定義を式で示したように各身体セグメントの質量と各身体セグメントの部分重心位置のみがわかれば一気に計算が可能である。

そこで必要になるのが、身体各部分の質量分布 (m_i) を計算する式および各セグメントのどの位置に重心位置があるのか (x_i, y_i) を推定する式である。ここでは身体部分係数を，2 つ用意した．ひとつは松井の係数 (松井，1958) であり，もうひとつは，Chandler の係数 (Chandler, 1975 [1]) である．

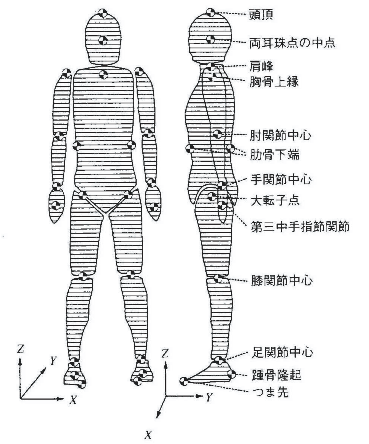

図 5.7 積層楕円板近似モデルおよび身体部分を規定する計測点（阿江ら，1992；岡田ら，1996）

図 5.5: 重心推定のために必要な関節マーカー

松井の身体係数

以下の表は，松井の身体部分係数と呼ばれるものである．関節位置では頭部は頭頂点と胸骨上縁点までが含まれることに注意が必要である．それ以外は解剖学的な関節の標識をもって各セグメントを定義すればよい．

Chandler による人体係数の推定式

Chandler の係数については，数式の形で引用した．BW は体重．Chandler の推定式の場合には，頭部は頭頂点と耳下点 (両耳下点を結ぶ中点）によって形作られていて，耳下点と転子点を結ぶセグメントが胴体であることに注意しなければならない．

- 部分質量の推定式 (BW=Body Weight[Kg])

  頭部 $WHead[BW] = 1.9074 + 0.0319 \times BW$

  胴部 $WTrunk[BW] = -0.7076 + 0.5324 \times BW$

  上腕 $WUpperArm[BW] := 0.4852 + 0.0215 \times BW$

[1] http://www.dh.aist.go.jp/bodyDB/m/k-02.html

表 5.1: 松井の身体部分係数表

部分	質量比 (%)[2]		重心位置比 (%)[3]	
	男	女	男	女
頭部	7.8	6.3	46.0	45.0
胴体	47.9	48.7	52.0	52.0
上腕	2.7	2.6	46.0	46.0
前腕	1.5	1.3	41.0	42.0
手	0.9	0.6	50.0	50.0
大腿	10.0	11.2	42.0	42.0
下腿	5.4	5.4	41.0	42.0
足	1.9	1.5	50.0	50.0

前腕 $WForearm[BW] = 0.2477 + 0.0129 \times BW$

手部 $WHand[BW] = 0.0759 + 0.0045 \times BW$

大腿 $WThigh[BW] = -1.5112 + 0.1271 \times BW$

下腿 $WShank[BW] = -0.1792 + 0.0437 \times BW$

足部 $WFoot[BW] = 0.2529 + 0.0089 \times BW$

- セグメント重心位置の推定式

頭部 $CGHead$[頭頂点, 耳下点] $= (1 - 0.6633) \times$ 頭頂点 $+ 0.6633 \times$ 耳下点

胴部 $CGTrunk$[耳下点, 右大転子点, 左大転子点] $= (1 - 0.5216) \times$ 耳下点 $+ 0.5216 \times$ ((右大転子 + 左大転子)/2.0)

上腕 $CGUpperArm$[肩峰点, 肘関節点] $= (1 - 0.50606) \times$ 肩峰 $+ 0.50606 \times$ 肘関節

前腕 $CGForearm$[肘関節点, 手関節点] $= (1 - 0.41666) \times$ 肘関節 $+ 0.41666 \times$ 手関節

手部 $CGHand$[手関節, 中手骨] $= (1 - 0.515) \times$ 手関節 $+ 0.515 \times$ 中手骨

大腿 $CGThigh$[大転子点, 膝関節] $= (1 - 0.39833) \times$ 大転子点 $+ 0.39833 \times$ 膝関節

下腿 $CGShank$[膝関節, 足関節] $= (1 - 0.41333) \times$ 膝関節 $+ 0.41333 \times$ 足関節

足部 $CGFoot$[足関節, 踵, 爪先] $= ((1 - 0.56) \times$ 踵 $+ 0.56 \times$ 爪先$) \times 0.5 +$ 足関節 $\times 0.5$

5.1.2 重心の推定

静止した姿勢では，通常成人であれば床面から身長比で 55 %程度の位置にあるが，運動によってその位置は常に変動する．関節の位置にマーカー (テープや反射ボールなど) を貼り付けたヒトをビデオによって撮影して、そのマーカー位置を計算機に取り込むことができればこの移動する重心位置を推定できる。重心というのは地球上の重力場における物体について、その物体に働く力の合成点として導入された、力学上考え出された仮想の点のことである。従って、その重心が物体内に存在しないこともありうる。

よく知られていることとして、走り高跳びの選手が背面跳びでバーを越えるときには、体は確かにバーを越えているが身体重心はバーの下であることがある。つまり身体の質量をバーよりも低いところしか通過させせなくてもバーを飛び越すことができるわけである。

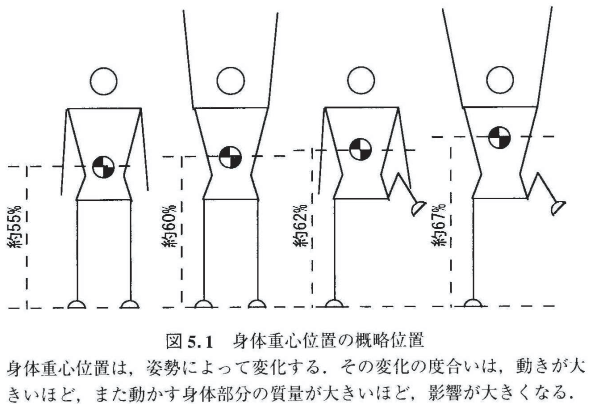

図 5.6: 重心の位置と姿勢による影響

5.2　運動方程式

物体の運動を力学的に記述する場合、これは式で書き下す必要がある。そのためには物体に働く力、外から受ける力をすべてその図に書き込まなければならない。外から受ける力のことを**外力**とよび、物体のなかで作用しあう力のことを**内力**とよぶ。内力は

5.2.1　フリーボディダイアグラム

スポーツバイオメカニクスでは、運動を記述する際にこの資料でもいくつか図があるように物体に力のベクトルを書き込んだ模式図で話を展開することが多い。これをフリーボディダイアグラムとよぶ。まず運動を考える際にはこのフリーボディダイアグラムが書けるようになろう。

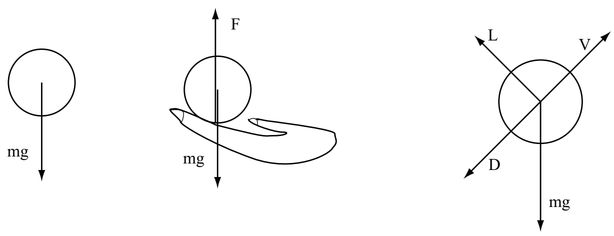

図 5.7: フリーボディダイアグラムの例

フリーボディダイアグラムをかくには以下のようなことに気をつけなければならない。

- 外力を余すことなく書き出す。内力はフリーボディダイアグラムには反映させない。
- 力のベクトルの正負の方向を決めたら向きによってきちんと正負を確認する。
- 斜面におかれた物体など垂直抗力 (地面反力) は、斜面に鉛直の向きとして考える。

例題:以下の事例に対してフリーボディダイアグラムをかけ

5.3　摩擦

摩擦は異なる二つの物体の表面に働く面に水平な成分の力のことをさす。これには静止状態ではたらく静止摩擦力と物体が動いている最中にはたらく動摩擦力がある。それぞれを簡単に説明して

おく。

5.3.1 静止摩擦

図??には、基本的な摩擦の構造をしめしている。静止状態ということは、物体に力が加わっていない、もしくはそれらの力の和が 0 であり、見掛け上動いていないのかいずれかである。

物体を引っ張るために力を作用させてみることを考える。ここでは斜め右上方へと引っ張っているイメージで描いたが、ひとまず水平に引っ張ることを考えると水平方向への力 F_x を大きくさせてもある程度までは物体はその場にとどまったままである。$F'_{max} = -\mu_s mg$ であらわされる最大静止摩擦力 F'_{max} は垂直抗力 $F_n = mg$ に比例して引っ張りの向きとは逆向きに作用する。このとき、係数 $-\mu_s$ のことを静止摩擦係数とよぶ。

荷物を引っ張って移動する場合に、ある程度上向きに引っ張ると楽に荷物が滑り始めるのは、引っ張り力の上向き成分 (F_t) の作用で垂直抗力分が減じられるためであることは図をみるとわかるだろう。

物体が斜面に置かれた場合には、垂直抗力の向きは路面に鉛直であり、路面の傾き θ に比例する。すなわち重力 mg の成分である $mgcos\theta$, によって確定する。

斜面におかれた物体がどの程度の角度の傾斜まで滑らずに静止しているかを考えてみる。静止しているとき、物体に作用する力はどの方向についても釣り合っているので、そのつりあいの条件を考えると

$$
\begin{aligned}
Fn &= mgcos\theta \\
Ft &= \mu Fn = mgsin\theta
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

したがって、

$$
mgsin\theta = \mu mgcos\theta \tag{5.4}
$$

$\therefore$

$$
\begin{aligned}
\mu &= tan\theta \\
\theta &= tan^{-1}\mu
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

つまり摩擦係数によって滑り出す角度が決まる。

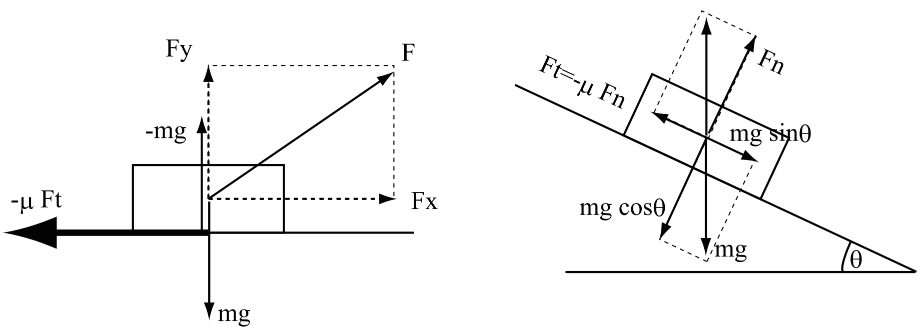

図 5.8: 摩擦力に関する模式図

5.3.2 動摩擦

静止摩擦とは異なり、境界面をはさむふたつの物体が運動中にうける力を動摩擦とよぶ。動摩擦も静止摩擦同様に垂直抗力に深く影響を及ぼします。したがって、式のうえでは、

$$F_f^{'} = \mu^{'} F_n \tag{5.6}$$

という形になる。ここで $\mu^{'}$ は動摩擦係数である。注目すべきは摩擦力は垂直抗力に比例し、面積によらないということであろう。

5.3.3 摩擦円錐

冬の朝、路面が凍っていると我々は小股で歩く術を知っている。なぜだろうか？なぜ路面が凍ると大股で歩こうとしないのか？摩擦円錐を知るとこの理由がわかった気がする。**摩擦円錐 (Friction Cone)** とは先に説明した静止摩擦係数 μ によってきまる角度 θ を頂点をもつ直角三角形をぐるりと一周回転させてできる円錐のことである。

この摩擦円錐のなかに作用した地面反力がある場合には**滑らない**。この摩擦円錐の外に力のベクトルが向くとき、必ず**滑る**。サッカーのキーパーが PK において横っとびでボールをとらえようとするが、キッカーが低いボールを蹴ることが有利である。すなわち横方向にキックすると地面から受ける力のベクトルがこの摩擦円錐の外に向いていしまうから、ゴールキーパーが滑ってしまうのである。同様に雨で湿った芝の状態のときにも摩擦係数が小さくなっているために、低い弾道でキックをすることが有利である。

路面が凍ると摩擦係数 μ が極端に小さくなるので、我々は真上に近い位置から足を路面に着地してまた同様に足をキックする必要があるのである。

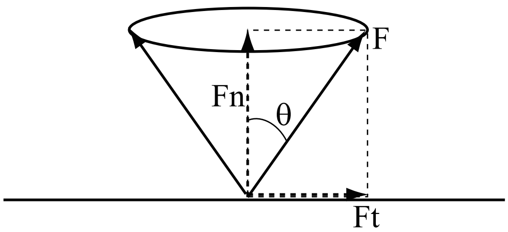

図 5.9: 摩擦円錐

参考文献

[1] Kingston Bernard, 足立和隆訳. よくわかる筋の機能解剖. メディカルサイエンス・インターナショナル, 2000.

[2] Thompson Floyd, 中村千秋, 竹内真希. 身体運動の機能解剖 (Manual of Structual Kinesiology). 医道の日本社, 1997.

[3] 佐伯由香, 黒澤美枝子, 細谷安彦, 高橋研一編訳（編）. トートラ　人体解剖生理学　原書 6 版. 丸善, 2004.