

第6回 力学基礎3

教科書 金子公宥、福永哲夫編、バイオメカニクス、杏林書院 第6章

剛体の回転運動、慣性モーメント

6.1 剛体の回転運動

剛体の運動は、並進運動と回転運動に分けられる。ヒトの身体が関節まわりの回転運動を行うことや、スイング動作といった回転を基本としたスポーツ運動を考える上で、回転運動を理解しておくことは重要である。

図 6.1 にあるように物体が円運動をしていると仮定する。回転の角度はこのとき反時計まわりを正として、一周すると 360 度であるが、SI 単位系に基づき角度はラジアン (rad) で表記する。すると一回転は 2π (rad) となる。ある角度 θ (rad) を移動する点の回転速度を ω (rad/s) とすれば、

$$\omega = \frac{\theta}{t} \quad (6.1)$$

で表せることをまず出発点とする。大車輪をする体操選手の重心の動き、とでも捉えてもらえればよい。今この選手の重心が点 P を通過する際の運動を観察すると速度 v で通過したとする。こののち、微小時間 t (s) 後に重心は点 Q の位置にくるとすれば円弧の長さ $PQ(=l)$ は、角度 θ に比例するため、

$$l = vt = r\theta \quad (6.2)$$

$$v = \frac{vt}{t} = \frac{r\theta}{t} = r\omega \quad (6.3)$$

とかける。つまり回転する重心の接線方向の速度 v は回転半径 r と回転角速度 ω との積であらわされる。まずこのことを押さえておこう。

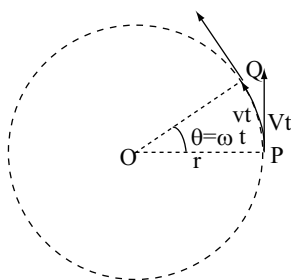


図 6.1: 回転運動の考え方

次に図 6.1 に示されるように物体に力が作用した場合の回転運動を考えよう。その力の作用点から延びる力のベクトルが物体の重心に向かうとき、その物体に回転が起こらない。すなわち並進運動だけが生じる。これに対して力の作用線が重心をはずれるときには物体には並進と回転の両方の運動が生じる。ただし、図右のように重心から等距離の位置に同じ大きさの力が逆向きに作用

すると、物体は並進運動をせずに回転運動のみを起こす。このような場合の力を偶力 (coupling force) とよぶ。

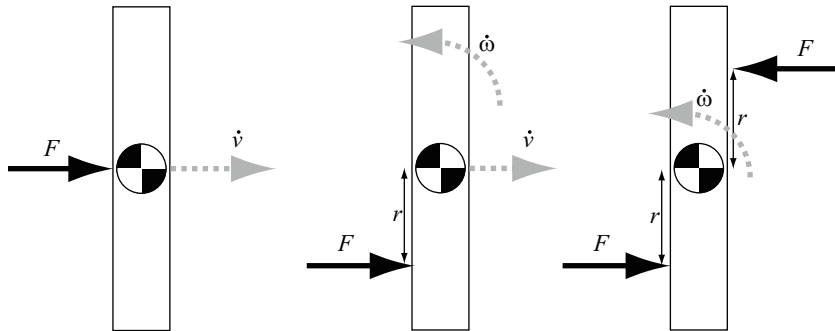


図 6.2: 剛体の並進運動と回転運動

ここでは物体の回転運動を考えるが、その物体とは剛体であるという前提で話を進める。シーソーを考えればすぐにわかると思うが、物体の回転運動に重要なのは「力の大きさ: F 」と「回転中心からの距離: r 」である。この力と距離との積をモーメント (moment) とよぶ。

$$N = r \times F \quad (6.4)$$

仮に次の図のようにシーソーの上に異なる体重の人が乗っている、あるいは異なる力で下方向に押していることを想像してほしい。このとき

$$F_1 \times r_1 = F_2 \times r_2 \quad (6.5)$$

が成り立つ。このとき双方の力と、回転中心からの距離の積は等しくこのシーソーはつりあいの状態にある。図でわかるようにこの場合は力のベクトルは作用点と回転中心を結ぶ線分に対して直角に働いている。

これに対して F_1 を回転中心から遠くへ離して、しかも斜め下方向へと作用させることを考える。そうするとこの力 F は、シーソーに固定した座標系 Σxy に対して斜め下方向、すなわち成分として F_x, F_y をもつことになる。シーソーの長手方向の力の成分、 F_x は明らかにこのシーソーを回転させる力として働かない。回転に貢献するのは F の y 方向成分 F_y だけである。すなわち力が作用するときにその力の作用点と回転中心位置を向かう線上に、力のベクトルが作用するとき、この力は回転の原動力にはならない。ここで F_y は F がのベクトルとシーソーのなす角 θ とすれば、その大きさが $F_y = F \sin \theta$ である。したがって、この場合のモーメントは、

$$N = r_1 F \sin \theta \quad (6.6)$$

となる。これは今紙面を手前から奥に貫く軸周りに回転させようとするモーメントであるが 3 次元空間上を考えると x 軸、 y 軸、 z 軸のそれぞれについて回転を起こさせるモーメントがあることはすぐにでもわかるであろう。そこでより一般的にこれをベクトルで表記して書き表すと次のようになる。

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (6.7)$$

位置ベクトル $\mathbf{r}$ と力のベクトル $\mathbf{F}$ の外積である。外積であるので乗算の順序に注意しなければならない。モーメントは、力 (N) と距離 (m) との積であるから、その単位は (Nm) である。式中出现くる回転中心から力の作用点までの距離のことをモーメントアーム (moment arm) と呼

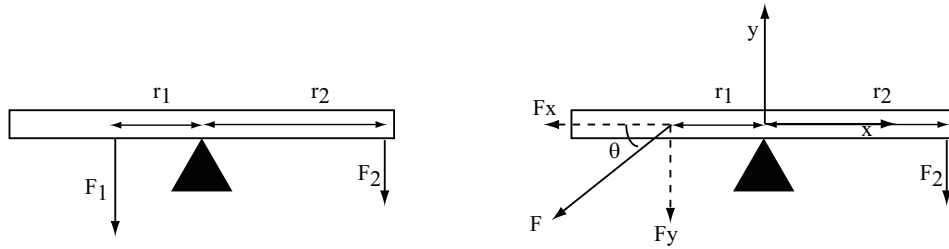


図 6.3: 剛体の回転運動の基本

ぶことがある。モーメントは、外積の定義により位置ベクトル (r) と力ベクトル (F) との外積で与えられる。したがって得られるモーメントのベクトルは位置ベクトル (r) および力ベクトル (F) 双方に直交するベクトルである。

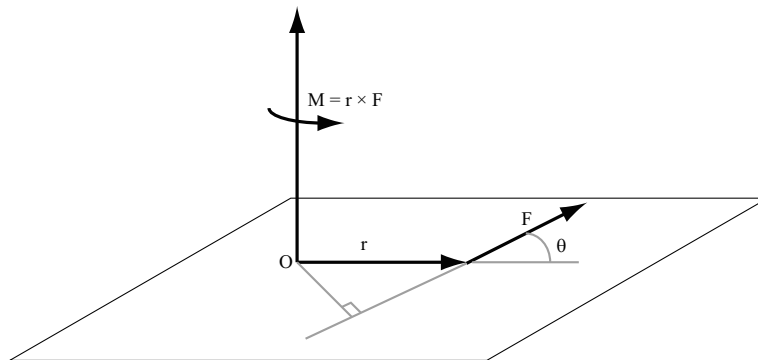


図 6.4: モーメントは位置ベクトル・力ベクトルの双方に直交する

実際にこのモーメントを計算するには以下のベクトル積の計算手順に従う必要がある。直交する 3 次元空間上の x 軸、 y 軸、 z 軸のそれぞれの各軸の単位ベクトル、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ を用いると次のように表せる。

$$\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z) \quad (6.8)$$

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z) \quad (6.9)$$

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (6.10)$$

$$= \begin{vmatrix} r_y & r_z \\ F_y & F_z \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} r_z & r_x \\ F_z & F_x \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} r_x & r_y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} \mathbf{k} \quad (6.11)$$

$$= (r_y F_z - r_z F_y) \mathbf{i} + (r_z F_x - r_x F_z) \mathbf{j} + (r_x F_y - r_y F_x) \mathbf{k} \quad (6.12)$$

例題 1

図 6.4 に示したベクトルの成分がそれぞれ以下のように定められた時のモーメントを求めよ。長さの単位は (m)、力の単位は (N) とする。

$$\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z) = (0.3, 0, 0)$$

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z) = (10, 10, 0)$$

例題 2

いま、野球のボール (質量 150g) を手のひらに載せて支えている。肘関節中心位置からボールの重心までの距離 $L = 35\text{cm}$ 、上腕二頭筋の前腕付着部位への距離 $l = 5.0\text{cm}$ とすると、上腕二頭筋が発揮している筋力を推定せよ。

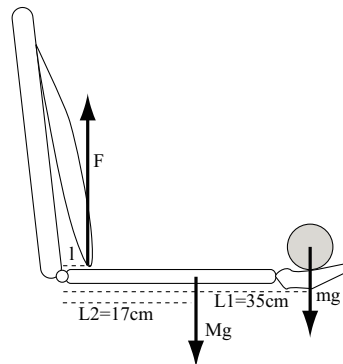


図 6.5: 上腕二頭筋によるモーメント

6.2 モーメントとバランス

最初に述べたように物体が並進運動もせず、回転運動もせずに釣り合いの状態にあるためには、物体に作用する力の成分が釣り合っていることと、モーメントが釣り合っているという二つの条件が必要である。

我々が直立している場合には、重心に作用する重力は鉛直下向きに作用していることはすでに学んだが地面反力も重心のほぼ真下から鉛直上向きに作用している。直立していても若干のゆらぎはあるが健常者ではそのようになる。

重心から下ろした垂線 (重力による力のベクトル) が、両足がつくる足部面積のなかにあれば、我々は直立することが可能である。ところが、この面、支持規定面とも呼ぶ、の外に垂線が下りるとき、足関節周りに重力がモーメントをもつために我々はこれに対抗するだけのモーメントを別のところで発揮しなければならない。

高齢者になって、腰が曲がってしまうとそれに伴って重心が前方に移動する。支持規定面をはみ出してしまうと直立することができなくなる。そこで杖を用いて体を支えなければならない。

当然支持する底面積が広がればそれだけ、重力のベクトルが支持規定面をはみ出しにくくなるのでバランスを保って直立はしやすくなる。

6.3 角運動量

並進運動の場合、運動の勢いをあらわすのは運動量であった。回転運動の場合、回転の勢いをあらわすのに角運動量 (angular momentum) を用いる。質点の場合には、質量 m の物体が速度 v

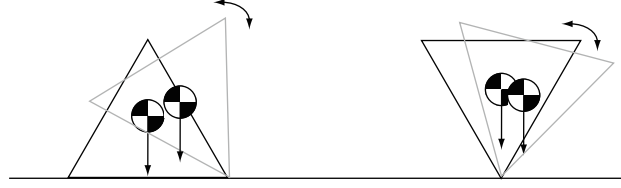


図 6.6: 支持規定面積とバランス

で動いている場合、その運動量は $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ であった。ここで回転中心から質点までの位置ベクトルを $\mathbf{r}$ とおくと、質点の角運動量 $\mathbf{H}$ は

$$\mathbf{H} = \mathbf{r} \times (m\mathbf{v}) \quad (6.13)$$

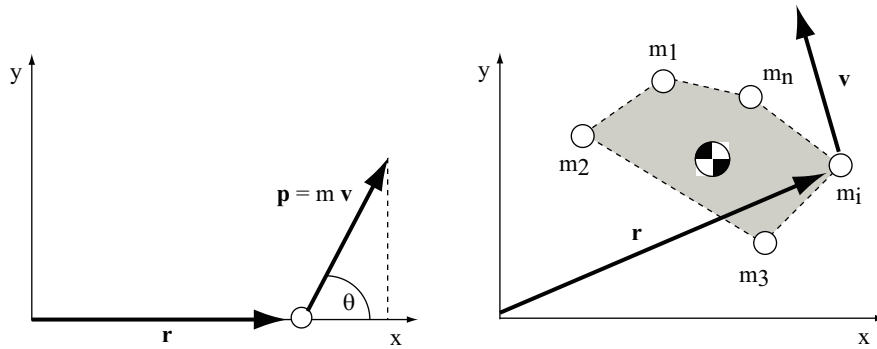


図 6.7: 質点の角運動量

であらわされる。質点がたくさんあつまった質点系では、

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times (m\mathbf{v}) \quad (6.14)$$

とあらわされる。質点系の拡張でもある剛体でも上の式は常に成り立つ。剛体では構成する各質点間の距離が不変であることを考えるとすべての剛体内の点は同じ角速度 ω で回転をしていることになる。回転中心を O とおきここから各点への位置ベクトルを $\mathbf{r}_i$ とおくと、その点の角運動量は $\mathbf{v}_i = \mathbf{r}_i \omega$ であることを利用すれば

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{v}_i) = m_i \mathbf{r}_i^2 \omega \quad (6.15)$$

であらわされる。すべての剛体内の点についてこれをまとめると

$$\mathbf{H} = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 \dots, m_n r_n^2) \omega = \sum_{i=1}^n (m_i r_i^2) \omega \quad (6.16)$$

ここで、式中の $\sum_{i=1}^n (m_i r_i^2)$ の部分は、回転中には変わらない値であり、回転中心位置 (軸) からの距離によって依存する値である。これを慣性モーメント (moment of inertia) とよぶ。通常慣性モーメントは記号 I で記述されることが多い。これは回転のしにくさともいえる。並進運動では質量が運動のしにくさ、であったが回転運動では慣性モーメントが回転のしにくさの指標となる。

$$I = \sum_{i=1}^n (m_i r_i^2) \quad (6.17)$$

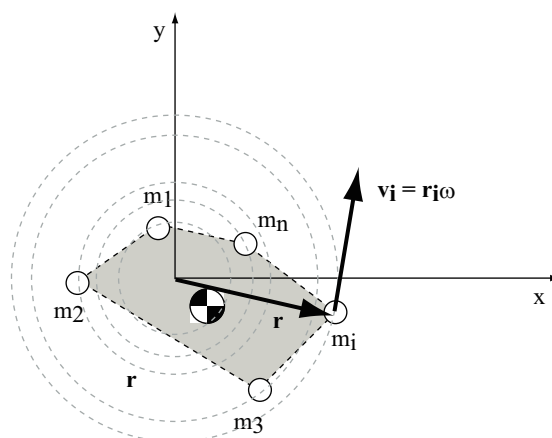


図 6.8: 剛体の角運動量

6.4 慣性モーメント

6.4.1 慣性モーメントの意味

慣性モーメントの意味は日常生活のなかから実感できる。同じ質量の物体でも、それが球であれば回転しやすく、棒であれば回転しにくいことは経験上明らかであろう。すなわち物体の運動のしにくさには質量以外にも質量の分布が関係する。すなわち回転中心からの距離 r が関係するわけである。

「回転のさせにくさ」、「回しにくさ」が慣性モーメントの意味ではあるが、もうひとつ付け加えるとすれば、回転している物体の「回転の止めにくさ」をも示している。止まっている大玉が意外にも軽いので、転がってくる大玉を容易に止められると思ったら意外にも回転がまるで止まらない、という子供のころの記憶がないだろうか？

6.4.2 幾何学物体の慣性モーメント

いくつかの幾何学物体については解析的に慣性モーメントが求められていて、実際の物体の慣性モーメントを大雑把に見積もるのに便利である。

表 6.1: 幾何学物体の慣性モーメント

物体の形状	慣性モーメント (Kgm^2)
長さ l の棒	$\frac{1}{12}ml^2$
辺の長さが、 a, b の長方形の板	$\frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$
半径 r の円板	$\frac{1}{2}mr^2$
半径 r の球	$\frac{3}{5}mr^2$

例題

アルティメットというスポーツで用いられるフライングディスクの質量は 175g、半径は 137.5mm である。これに対して陸上競技の円盤投げで用いられる円板の質量は 2.0Kg、半径 110mm である。このふたつの競技で用いられている道具を幾何学的に円板とみなして、慣性モーメントを求め円盤投げの円盤が、フライングディスクの円盤に対してどの程度「回転させにくい」のかを示せ。

6.4.3 スポーツ用具における慣性モーメント

例題では簡単な形状をした物体であれば幾何学的な物体とみなして慣性モーメントを概算できることを示した。しかし実際にスポーツで用いられる用具にはフライングディスクのようなシンプルな形状をしたものはむしろ稀である。そこで実測によって慣性モーメントを計測することができる。

6.4.4 振動法による慣性モーメントの計測 (一本吊り法)

比較的長い物体の長軸 (長手方向の軸) に垂直な軸に対する慣性モーメントの計測に用いる方法である。

P 点を通り試料の長軸に垂直な軸に関する慣性モーメントを I_P 、試料の質量を m 、重力加速度を g 、 h を P 点と重心位置 G との距離、 θ は試料の振れ角度とする。

物体に働く力は $-mg$ である。これは張力につりあう力、 F_1 と物体を運動 (振動) させようとする力 F_2 に分解できる。

$$F_1 = -mg \cos \theta \quad (6.18)$$

$$F_2 = -mg \sin \theta \quad (6.19)$$

振れ角 θ を微小にすると、 $\sin \theta = \theta$ が成り立つので、

$$F_2 = -mg\theta \quad (6.20)$$

$$M = I_P \alpha \quad (6.21)$$

$$M = F_2 h \quad (6.22)$$

$$= -mgh\theta \quad (6.23)$$

$$I_P \alpha = -mgh\theta \quad (6.24)$$

角速度 α と θ との関係は、 $\alpha = \ddot{\theta}$ であるので、

$$I_P \ddot{\theta} = -mgh\theta \quad (6.25)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{mgh\theta}{I_P} \quad (6.26)$$

この式は単振動の式であるので、周期 T は以下の式で表される。

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_P}{mgh}} \quad (6.27)$$

$$\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{I_P}{mgh} \quad (6.28)$$

$$I_P = mgh \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \quad (6.29)$$

となり、P 点に関する慣性モーメント I_P が計算できる．これにより重心を通して試料の長軸に垂直な慣性モーメント I_G は平行軸の定理 (Parallel axis theorem) により

$$I_G = I_P - mr^2 \quad (6.30)$$

また試料の任意の軸 O 周りの慣性モーメント I_O は、重心と任意軸までの距離を l とおくと

$$I_O = I_G + ml^2 \quad (6.31)$$

で求めることが出来る．

実際にバットの慣性モーメントを計測するには以下のようなものが必要である。

ストップウォッチ、巻尺、フック、はかり、おもり、糸、くさび、フック取り付け用工具、バット

【手順】

1. バットの質量を計測する．
2. バットの重心位置 G を求める．これには糸を用いてバットが水平になる位置を重心とみなす．重心位置とフックとの距離を測る．
3. バットのグリップエンドにフックを取り付ける．
4. バットのフックを固定台に取り付けたフックに引っ掛けぶら下げる．
5. 固定したフックの接点とバットの重心までの距離 h を巻尺で計測する．
6. バットを出来るだけ小さく振動させる．
7. 振動周期 T を計測する．このとき振動しているバットのフックの近くに糸に吊り下げたおもりを用意し鉛直線としてみると計測がしやすい．
8. 振動周期は数回分の振動回数を要した時間で割るとよい．これにより周期 T を計測する
9. 以上の作業で得た値を用いて、 I_P , I_G , を求める．
10. 次に任意の点 O を決め、この点周りの慣性モーメント I_O を求める．例えばこの任意点をグリップエンドから 10cm の位置とし、ここで打者がバットを握っているものとみなし、打者がバットを振る際のバットの慣性モーメントを求める．

6.5 角運動量保存則

並進運動の場合には、物体の運動量変化が作用した力に比例する．これに対して回転運動の場合には、物体の角運動量変化は、作用したモーメントに比例する．式で書くと

$$\frac{dH}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = N \quad (6.32)$$

回転している物体に外力からのモーメントが作用しなければそのまま回転を続けるということである。

実際の運動を考えてみるとスケート選手がスピンをしているとき、外力として働くのは重力と氷から受ける力であると仮定できる．重力は回転軸に平行であるために回転には影響を及ぼさない．また同様に氷から受ける力は鉛直に近いためにこれも回転に影響しないと仮定をすると、いったん回転を始めたスケーターの体はずっと回転を続けることになる．先に述べたように、慣性モーメントは物体の形状に影響を及ぼすことから、スケーターはおもに手・上腕を動かすことによりその慣性モーメントを変化させ、回転速度をコントロールしている。

参考文献

- [1] Kingston Bernard, 足立和隆訳. よくわかる筋の機能解剖. メディカルサイエンス・インターナショナル, 2000.
- [2] Thompson Floyd, 中村千秋, 竹内真希. 身体運動の機能解剖 (Manual of Structural Kinesiology). 医道の日本社, 1997.
- [3] 佐伯由香, 黒澤美枝子, 細谷安彦, 高橋研一編訳 (編). トートラ 人体解剖生理学 原書 6 版. 丸善, 2004.