

# 慣性センサを使用した新たな流体力推定手法の提案

所属：CB

名前：小柳 玲乃

## 1.目的

フライングディスクは円盤状の遊具として広く知られており、回転させ、飛ばすことで安定した飛翔を可能にしている。その飛翔形態は他のスポーツにおける飛翔体（野球ボールやサッカーボールなど）と比較し、非常に特徴的である。フライングディスクはその形状や飛翔の状態から生じる翼の効果により、多くの揚力を得ることが出来、空中を滑るように飛翔する。そのような特徴的な飛翔を行うフライングディスクは飛翔中に運動の方向が大きく変化するような現象がみられることがある。中途まで比較的直進する飛翔軌跡を描いていたディスクが突如左右に曲がる軌道を描く現象の他、飛翔中にディスクが急激に落下する現象も散見される。このような物体の速度ベクトルが変化する現象は、飛翔中のディスクに作用する力、飛翔中にディスクに作用する外力とは空気力のことである。この空気力の代表点、即ち圧力中心位置及び揚力、抗力、横力といった空気力の合力の方向が飛翔中に変化するために引き起こされるものと考えられる。ディスクの速度、回転角速度、速度ベクトルとディスクの面のなす角である仰角といったパラメータのわずかな変化が圧力中心位置の大きな変化となり、圧力中心位置の大きな変化が結果としてディスクの姿勢、速度ベクトルの大きな変化を生みだしていると考えられる。飛翔中にディスクの速度ベクトルが大きく変化する現象は速度、回転角速度、ディスクの仰角といった要素のわずかな変化を観察する必要があるため、人間に実投射させる実験では再現できないため、より速度、回転角速度、仰角を厳密に設定できる風洞を使用することが本研究にとって不可欠である。今回は加速度計での実投射に先駆け、風洞実験での不ディスクに作用する力を計測し、数値計算により飛翔を再現し

た。

## 2.実験概要

ディスクの中心部に治具を取り付け、ディスクを慣性主軸で 0, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 14rps(round per second)でそれぞれ回転させる。その際ディスクの迎え角を+10 deg から-10 deg まで変化させ、風速を 0m/s から 20m/s まで変化させる。設定した風速、ディスクの角速度、仰角時の抗力、揚力、横力及び三軸のジャイロモーメントをそれぞれ計測する。特に実際の飛翔の状態に近いと思われる+5 deg から-5deg の間は特に細かく 1deg ごとに細かく仰角を変化させ、計測を行う。実験の際フライングディスクは六分力計に以下のように取り付けた(Fig. 1)。

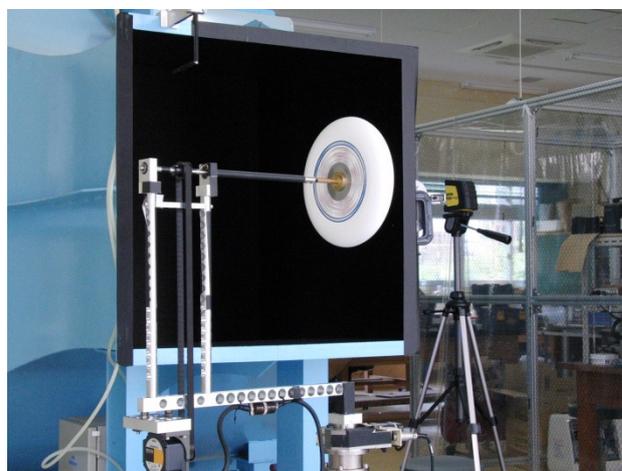


Fig. 1 : Attitude of the disc during the experiment

## 座標系の定義

分析を行うに当たり、ディスク座標系を定義した。ディスク座標系の原点をディスクの中心におき、 $z$  軸の方向をディスクの上面と垂直方向に定義し、速度ベクトルをディスクの上面に射影した方向ベクトルを  $x$  軸の方向と定義した。さらに右手座標系に従い、 $x$ ,  $z$  軸の双方に垂直なベクトルを  $y$  軸と定義し

た. さらにディスクの迎え角を  $\alpha$  とおいた. Fig. 2 に迎え角  $\alpha$  の正負, Fig. 3 に座標系の方向を図示した.

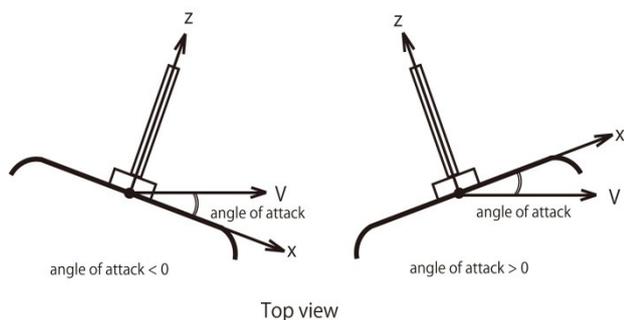


Fig. 2 : 迎え角の正負の定義

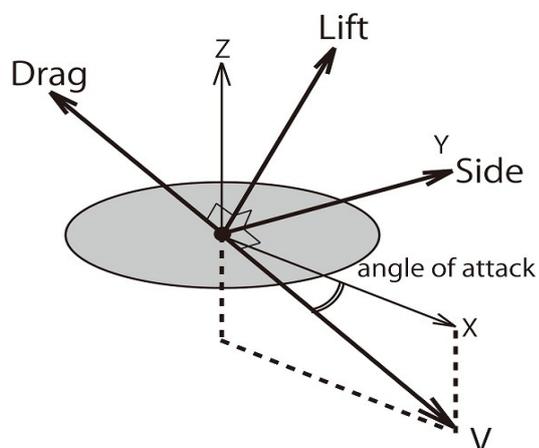


Fig. 3 : 座標系の方向の定義

ディスク座標系に従えば抗力 D, 揚力 L, 横力 S は以下のように算出される.

1.  $D = -F_x \cos \alpha + F_z \sin \alpha$
2.  $L = F_x \sin \alpha + F_z \cos \alpha$
3.  $S = F_y$

また x, y, z 軸まわりのモーメントをそれぞれ  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  とした.

### 実験結果

実験の結果より,  $\omega_z = 50$  (rad/s) 時の各軸の力, モーメントは以下のような結果となった. 結果は以下の Fig 4~Fig 9 に示す. (Mathematica の関数 Interpolation[] を使用).  $\omega_z = 50$  rad/s あたりが熟練

者の初期角速度のため Plot の際目安に採用した.

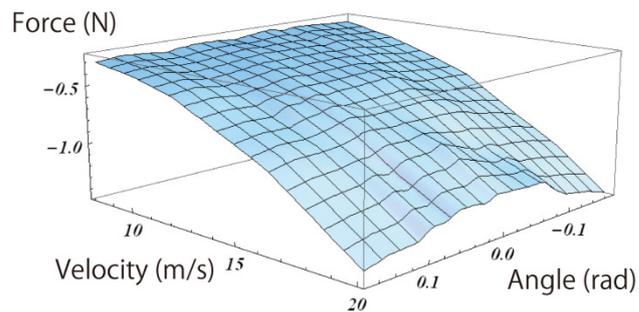


Fig.4 :  $F_x (\omega_z = 50 \text{ rad/s})$

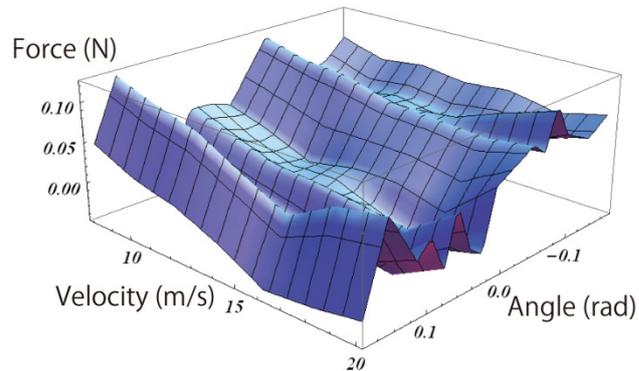


Fig.5 :  $F_y (\omega_z = 50 \text{ rad/s})$

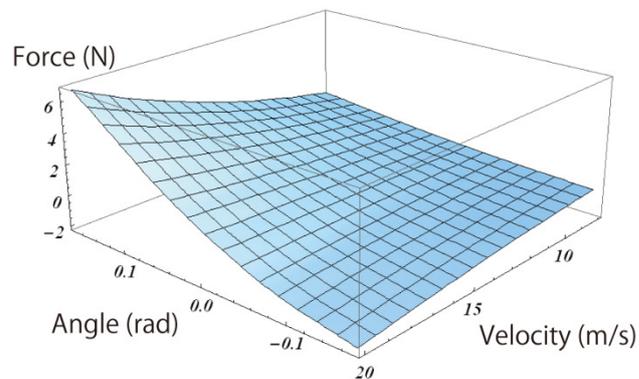


Fig.6 :  $F_z (\omega_z = 50 \text{ rad/s})$

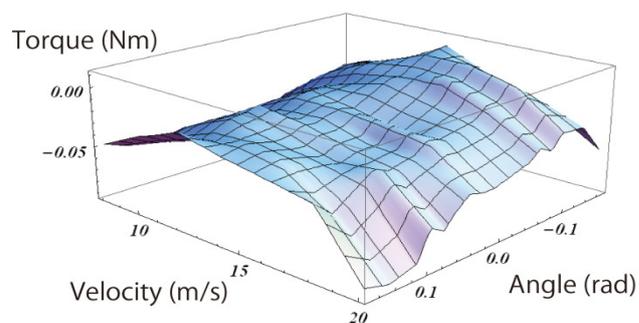


Fig.7 :  $M_x (\omega_z = 50 \text{ rad/s})$

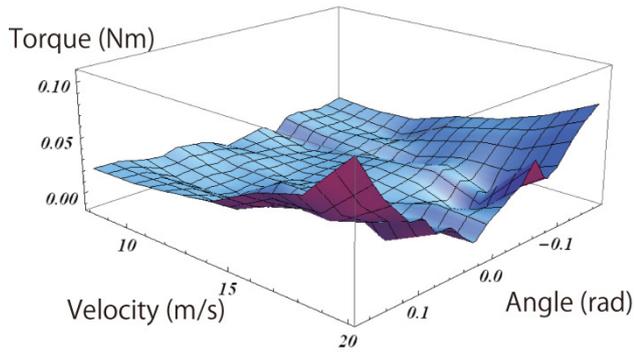


Fig.8:  $M_y$  ( $\omega_z = 50 \text{ rad/s}$ )

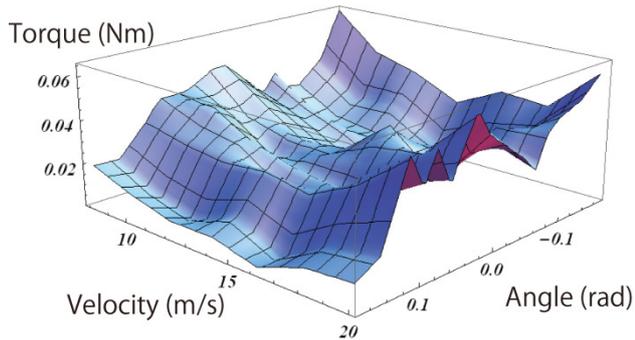


Fig.9:  $M_z$  ( $\omega_z = 50 \text{ rad/s}$ )

これらのデータを使用し、空気力がディスクに作用する作用点である圧力中心位置を求める。

### 圧力中心位置

圧力中心位置とは、ディスクに対する空気力の作用点である。実験において計測したディスク座標系各軸のモーメントはディスクの中心部まわりのモーメントである。圧力中心位置まわりでのモーメントは各軸ともに0となる。そのためディスク座標系の  $xy$  平面に垂直な力  $F_z$  とその作用点の積と、中心周りのモーメントが等しくなるディスク座標系  $xy$  平面上の位置を圧力中心位置とし、 $(r_x, r_y)$  で表した。 $r_x$  及

び  $r_y$  は以下のように算出した。

$$r_x = \frac{M_y}{F_z} \quad 4.$$

$$r_y = -\frac{M_x}{F_z} \quad 5.$$

下記の Fig. 10 は、 $v = 15 \text{ m/s}$ ,  $\omega_z = 50 \text{ rad/s}$  時の迎え角  $\alpha$  の角度変化による圧力中心位置の推移である。

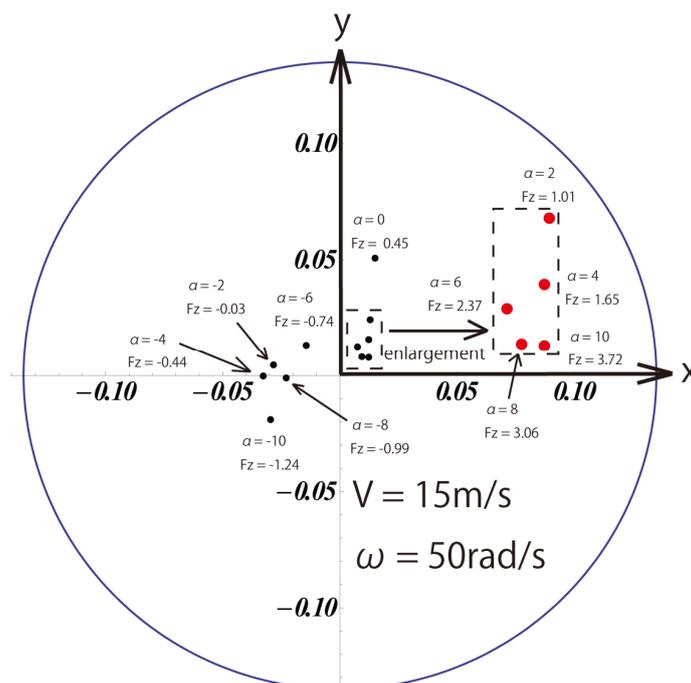


Fig. 10 : Center of Pressure of the disc ( $v = 15 \text{ m/s}$ ,  $\omega_z = 50 \text{ rad/s}$ )

### シミュレーション

計測したデータを使用して実際にフライングディスクの飛翔を再現する。飛翔シミュレーションに伴い、3つの座標系を定義した。それぞれ絶対座標系、ディスク座標系1、ディスク座標系2をそれぞれ設定した。以下に各座標系の関係性について記述する。

### 各座標系の関係と座標変換

まずは絶対座標系とディスク座標系1との関係を下記に記述する。

絶対座標系  $\sum_{XYZ}$  を X 軸まわりに  $\phi$ 、Y 軸まわりに  $\psi$ 、Z 軸まわりに  $\theta$  回転させた時、ディスク座標系1  $\sum_{x_1 y_1 z_1}$  に一致すると考える。絶対座標系

$[X \ Y \ Z]^T$  とディスク座標系1  $[x_1 \ y_1 \ z_1]^T$

との関係は以下の式で表すことができる

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \mathbf{R}_1 \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad 6.$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_1^T \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad 7.$$

ここで

$$\mathbf{R}_1^T = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^T \quad 8.$$

より

$$\mathbf{R}_1^T = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta & -\cos \phi \sin \theta + \sin \phi \sin \phi \cos \theta & \sin \phi \sin \theta + \cos \phi \cos \phi \sin \theta \\ \cos \phi \sin \theta & \cos \phi \cos \theta - \sin \phi \sin \phi \sin \theta & -\sin \phi \cos \theta + \cos \phi \sin \phi \sin \theta \\ -\sin \phi & \sin \phi \cos \phi & \cos \phi \cos \phi \end{bmatrix} \quad 9.$$

となる。またオイラー角の微分値より、ディスク座標系の角速度  $[\omega_{x_1} \ \omega_{y_1} \ \omega_{z_1}]^T$  は以下のように求めることが可能である。

$$\begin{bmatrix} \omega_{x_1} \\ \omega_{y_1} \\ \omega_{z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \phi \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad 10.$$

また絶対座標系とディスク座標系1との関係は以下の Fig.11 のようになる。

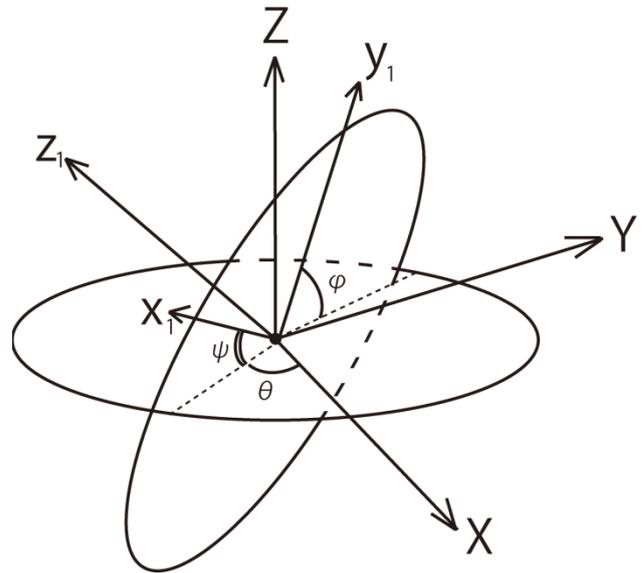
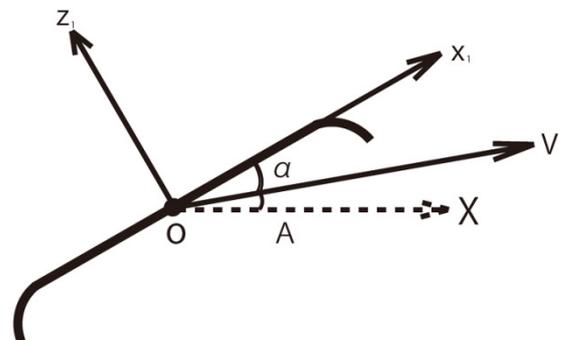


Fig.11 : Relationship between GCS and DCS1

また速度ベクトルと絶対座標系 X とのなす角を仰角とし、 $\alpha$  とおいた。速度  $v$ 、 $\alpha$ 、 $A$  の関係については下の Fig.12 に記す。



Disc coordinate system 1 (Side view)

Fig. 12 : Relationship between  $v$ ,  $\alpha$  and  $A$

続いてディスク座標系 1 とディスク座標系 2 との関係を下記に記述する。ディスク座標系 2 は先に圧力中心位置を記述した際に用いた座標系と同様のものである。角軸の方向は速度ベクトルをディスクの上面に射影したものを  $x$  軸，ディスクの上面と垂直なものを  $z$  軸，右手座標系に従い  $x$ ,  $z$  軸双方に垂直な方向を  $y$  とし，ディスクの中心を原点  $o$  とした。

そしてディスク座標系 1 を， $z_1$  軸方向に  $\beta$  回転した際にディスク座標系 2 に一致するようにディスク座標系 1 を設定した。（ $\omega_z$  の大きさが他の軸の角速度と比較して大きく，計算がすぐに破たんしてしまうことが多いため。クォータニオンを使用すれば…）  
角度  $\beta$  は以下のように示すことが可能である。

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_2 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad 11.$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 12.$$

ディスク座標系 1 とディスク座標系 2 との関係は以下の Fig.13 のようになる。

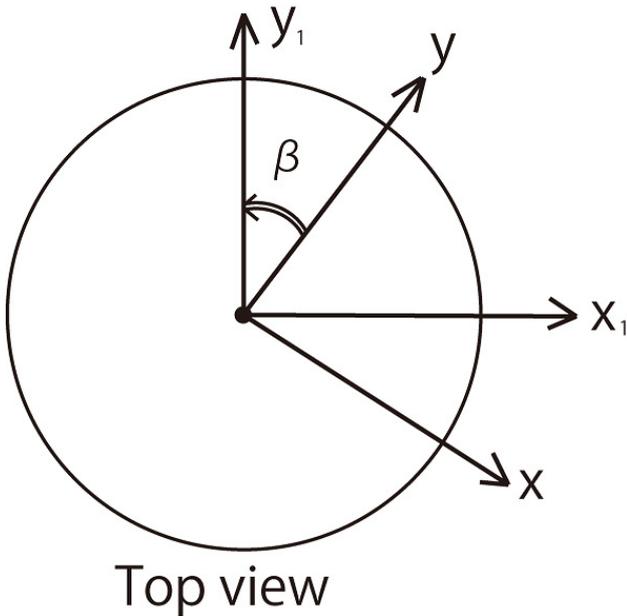


Fig. 13 : Relationship between DCS1 and DCS2

ここで角度  $\beta$  およびその微分値である  $\beta'$  は以下のように示すことが可能である。またディスクの迎え角  $\alpha$  の微分値を以下のように設定した。（ $\alpha'$ ,  $\beta'$  は後のシミュレーションで必要となる）

$$\beta(t) = \tan^{-1} \left( \frac{v_{y_1}(t)}{v_{x_1}(t)} \right) \quad 13.$$

$$\beta'(t) = \frac{v_{x_1}(t)v'_{y_1}(t) - v_{y_1}(t)v'_{x_1}(t)}{v_{y_1}^2(t) + v_{x_1}^2(t)} \quad 14.$$

$$\alpha'(t) = -\omega_y(t) \quad 15.$$

運動方程式

運動方程式は以下のものである。

$$m(\dot{\mathbf{v}}_1(t) + \boldsymbol{\omega}_1(t) \times \mathbf{v}_1(t)) = \mathbf{F}_1 \quad 16.$$

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}}_1(t) + \boldsymbol{\omega}_1(t) \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}_1(t) = \mathbf{M}_1 \quad 17.$$

ここで  $m$  はディスクの質量であり， $\mathbf{I}$  は慣性モーメントの行列である。質量  $m$ ，慣性モーメント  $\mathbf{I}$  はそれぞれ計測し以下の値に定めた。

$$m = 0.175 \quad 18.$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad 19.$$

$$I_{zz} = 0.0094 \quad I_{xx} = I_{yy} = 0.0046 \quad 20.$$

力，モーメントはそれぞれディスク座標系 2 より座標変換する。（その際重力成分を加味していないため，力は  $\mathbf{F}_{1(aero)}$  と書くことにする）

$$\mathbf{F}_{1(aero)} = \mathbf{R}_2^T \mathbf{F}_2 \quad 21.$$

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{R}_2^T \mathbf{M}_2 \quad 22.$$

そして重力加速度成分を加味し

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{1(aero)} + \mathbf{R}_1 m \mathbf{g} \quad 23.$$

$$\mathbf{g} = [0 \quad 0 \quad -9.806]^T \quad 24.$$

以上のような運動方程式を使用し、シミュレーションを行う。

シミュレーション

今回はルンゲ=クッタ法を使用してシミュレーションを行った。(Mathematica の関数, NDSolve[] を使用, NDSolve[] では  $\mathbf{F}_2$ ,  $\mathbf{M}_2$  を関数で示す必要があるため, Interpolation[] を使用し, 関数化した。その

ため  $\mathbf{F}_2$  および  $\mathbf{M}_2$  は  $\alpha$ ,  $\omega_z$ ,  $|\mathbf{v}|$  を従属変数にもつ関数である  $\rightarrow \mathbf{F}_2(\alpha(t), \omega_z(t), |\mathbf{v}(t)|)$  ,

$\mathbf{M}_2(\alpha(t), \omega_z(t), |\mathbf{v}(t)|)$  となるということ)

シミュレーションの際にこちらがいじるパラメータは初期迎え角 ( $\alpha(0)$ ), 初期仰角 ( $A(0)$ ), ディスクの初期角速度 ( $\omega_z(0)$ ) およびディスクの初期速度の大きさ ( $|\mathbf{v}(0)|$ ) である。今回は飛翔を開始する際のディスク中心の絶対座標系からみた位置座標を  $\mathbf{P}(0) = [0 \quad 0 \quad 1]^T$  とし,  $P_z(t) = 0$  となった際に飛翔が終了したと仮定し, それまでの飛翔中の各パラメータを求めた。

また, ルンゲ=クッタ法に必要な各パラメータの初期値は以下のように設定した。

DCS2

速度

$$\mathbf{v}(0) = \begin{bmatrix} |\mathbf{v}(0)| \cos \alpha(0) \\ 0 \\ |\mathbf{v}(0)| \sin \alpha(0) \end{bmatrix}$$

角速度

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z(0) \end{bmatrix}$$

DCS1

角度

$$\beta(0) = 0$$

GCS

位置

$$\mathbf{P}(0) = \begin{bmatrix} X(0) \\ Y(0) \\ Z'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

角度

$$\begin{bmatrix} \phi(0) \\ \varphi(0) \\ \theta(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -(\alpha(0) + A(0)) \\ 0 \end{bmatrix}$$

速度

$$\mathbf{V}(0) = \begin{bmatrix} |\mathbf{v}(0)| \cos[\alpha(0) + A(0)] \\ 0 \\ |\mathbf{v}(0)| \sin[\alpha(0) + A(0)] \end{bmatrix}$$

結果

1. 初期迎え角の違いによる飛翔軌跡の差異

初期仰角 ( $A(0) = 5 \text{ deg}$ ), ディスクの初期角速度 ( $\omega_z(0) = 50 \text{ rad/s}$ ) およびディスクの初期速度の大きさ ( $|\mathbf{v}(0)| = 15 \text{ m/s}$ ) 時の  $\alpha(0)$  の値を  $-3 \sim +5 \text{ deg}$  まで  $1 \text{ deg}$  ずつ変化させ, 絶対座標系からみた飛翔軌跡の違いを 3D でプロットした Fig. 14 では  $\alpha(0) = -3 \sim +1 \text{ deg}$  までの飛翔軌跡を, Fig. 15 では  $\alpha(0) = +1 \sim +5 \text{ deg}$  までの飛翔軌跡をそれぞれプロットしたものである。

また Fig. 16~18 は,  $+1 \sim +5 \text{ deg}$  までの飛翔軌跡をそれぞれ  $xy$ ,  $xz$ ,  $yz$  平面に写像したものである。

2. 初速度の違いによる飛翔軌跡の差異

初期迎え角 ( $\alpha(0) = 0 \text{ deg}$ ) 初期仰角 ( $A(0) = 5 \text{ deg}$ ), ディスクの初期角速度 ( $\omega_z(0) = 50 \text{ rad/s}$ ) 時の初期速度の大きさ ( $|\mathbf{v}(0)|$ ) を  $10 \sim 19 \text{ m/s}$  まで  $1 \text{ m/s}$  ずつ変化させ,

その飛翔軌跡の違いをプロットした. Fig. 19 は 10 ~15m/s まで変化させた際の飛翔軌跡, Fig. 20 は 15 ~19m/s まで変化させた際の飛翔軌跡をそれぞれブ

ロットしたものである. また, Fig. 21~23 は, 10, 16~19m/s までの飛翔軌跡をそれぞれ xy, xz, yz 平面に写像したものである.

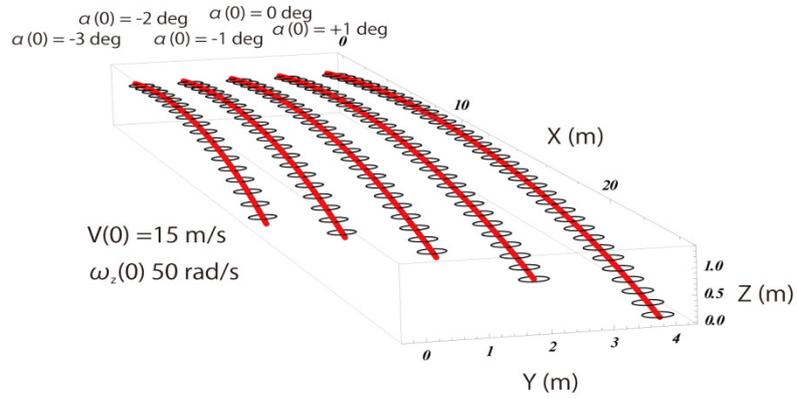


Fig. 14

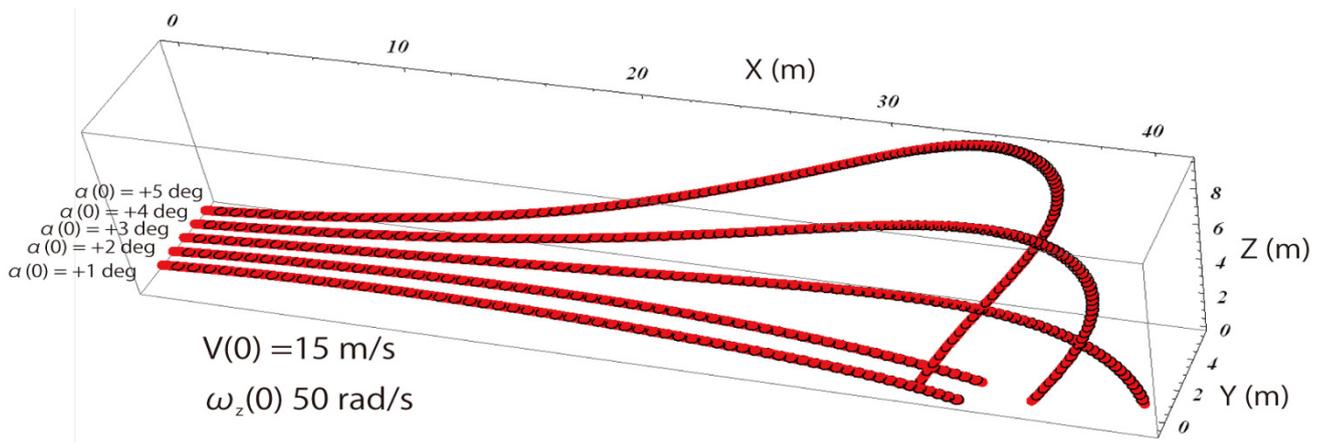


Fig. 15

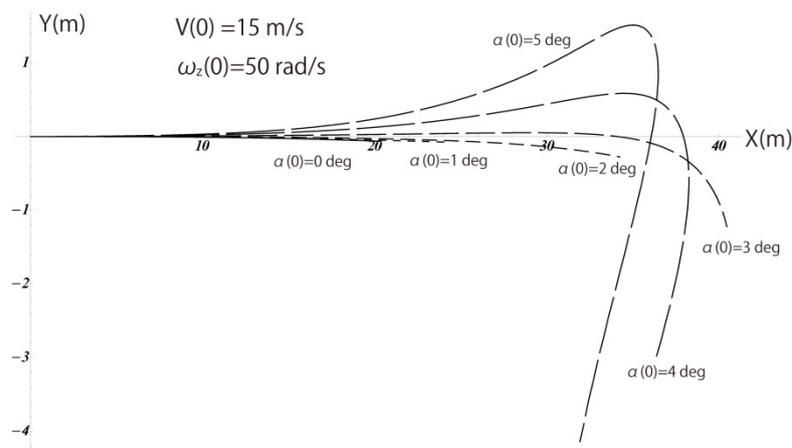


Fig. 16 : XY

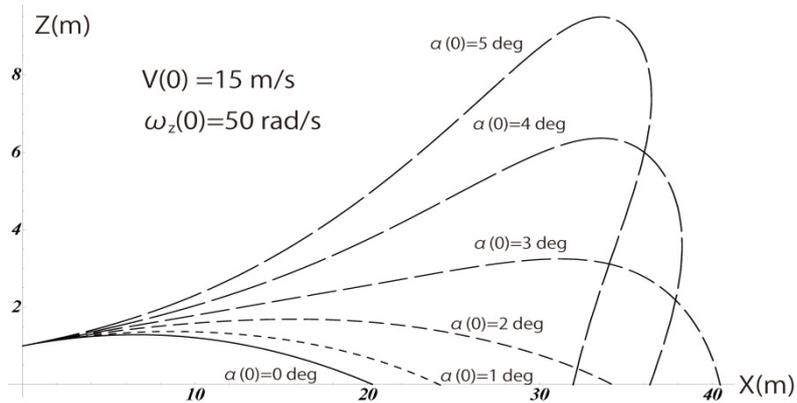


Fig. 17 : XZ

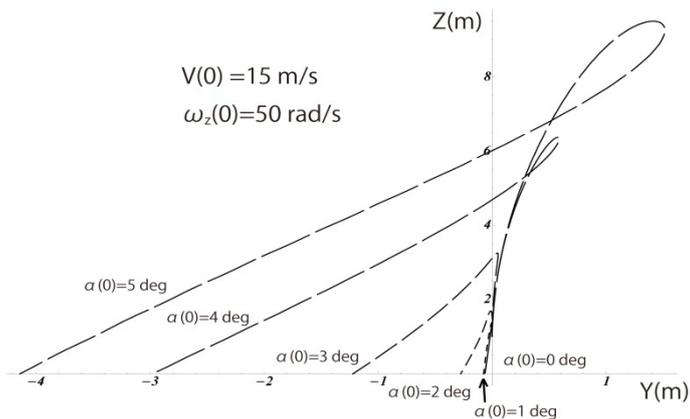


Fig. 18 : YZ

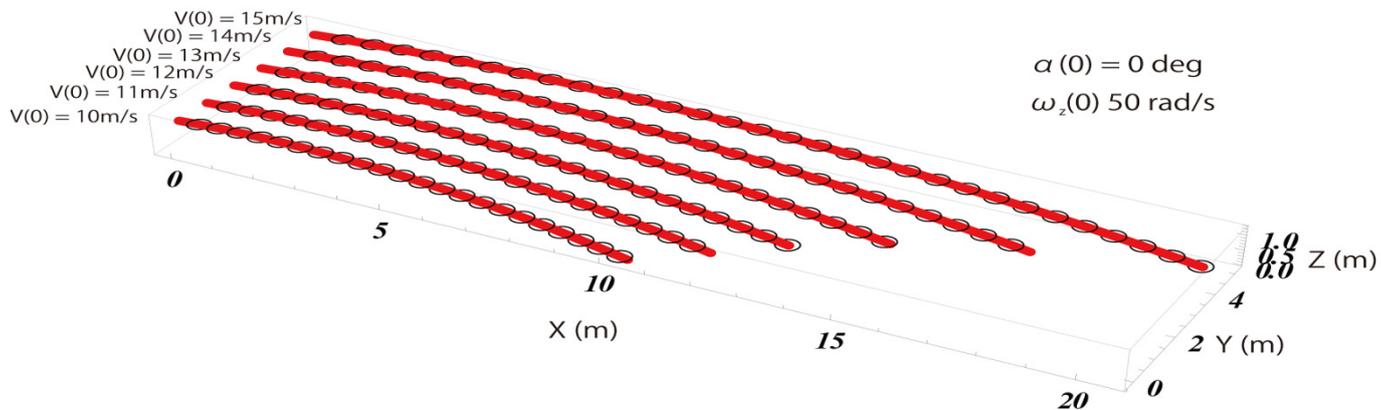


Fig. 19

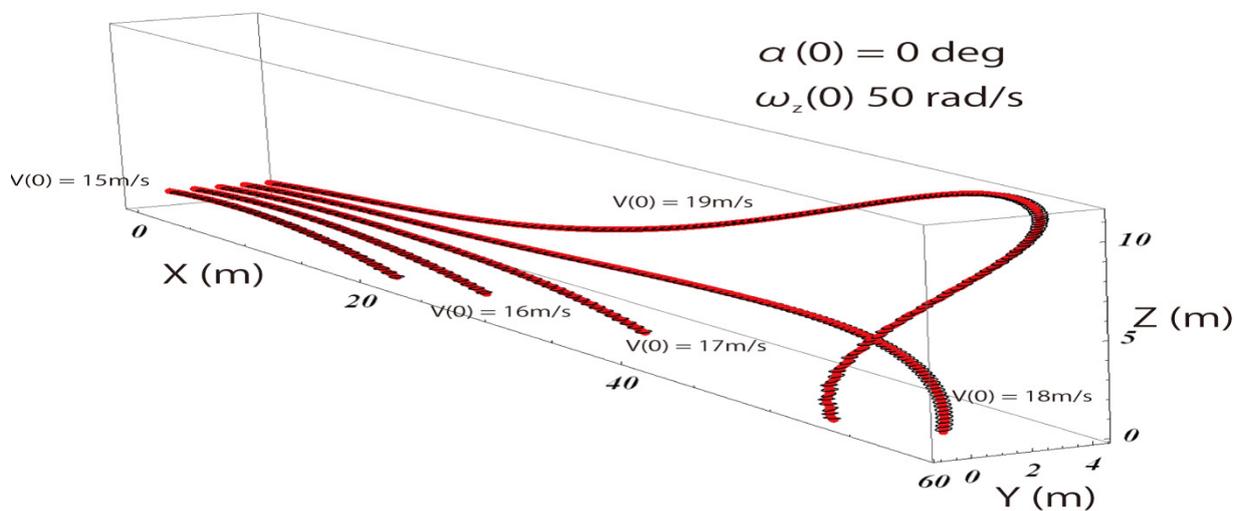


Fig. 20

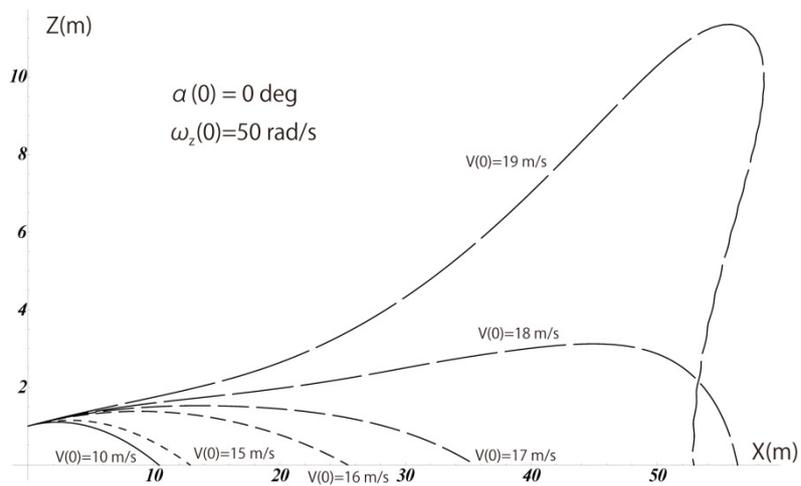


Fig. 22 : XZ

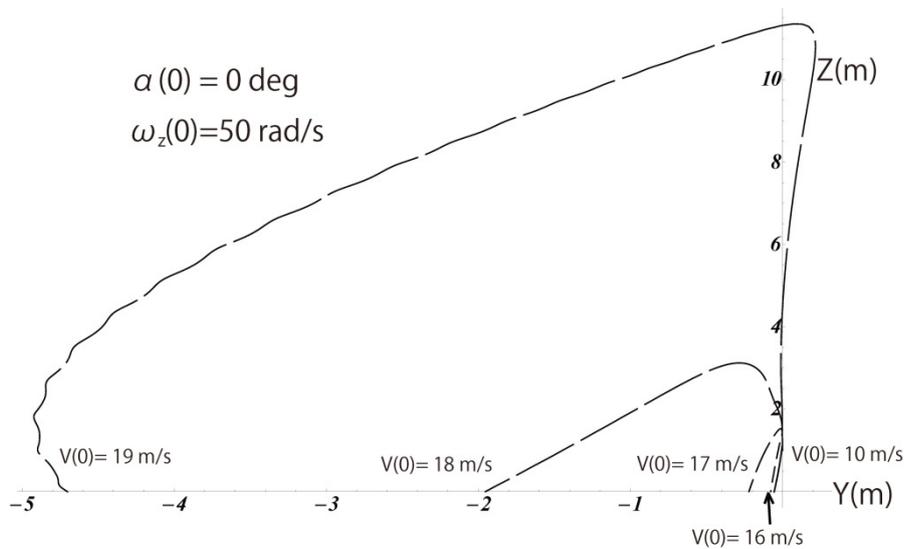


Fig. 23 : YZ

### 今後

シミュレーションの結果と実投射データを比較する。また、式 16, 17 を拡張し、ディスクにつけた慣性センサに作用する加速度、角速度を推定する。