2 つの閉曲線を境界面に持つ
極小曲面の計算と生成における手法の研究

2021 年度森泰吉郎記念研究振興基金研究助成金　成果報告書

慶應義塾大学大学院政策メディア研究科 XD 修士 2 年
松川昌平研究室所属　82024943 林拓磨

1. 背景

本研究は 2 つの閉曲線を曲海面に持つ極小曲面を計算し、またそれを実際に生成することを目的とした研究である。

極小曲面の概念は、1762 年にフランスの数学者ラグランジュが論文の中で記した「与えられた閉曲線を境界にもつ曲面全体の中で面積最小の ものをみつけたい」という問いに由来する [1]。その後、数学者プラトーによってシャボン膜によってその問題の証明可能であるという仮説を提唱したことにより、これら一連の問題はプラトー問題と呼ばれている [2]。極小曲面の大きな特徴は 2 つ存在する。一つは曲面の面積が極小値をとること。もう一つは曲面の表面上の任意の点における平均曲率：H=0[3] になることである。またこれらのことは等張力曲面と等価である [4]。fig.1 は極小曲面の一例である。閉曲線をシャボン液につけるとその閉曲線を境界面に持つ極小曲面が生成される。これはシャボン膜に働く表面張力を最小化しようと表面積が最小となるように変形するからである。

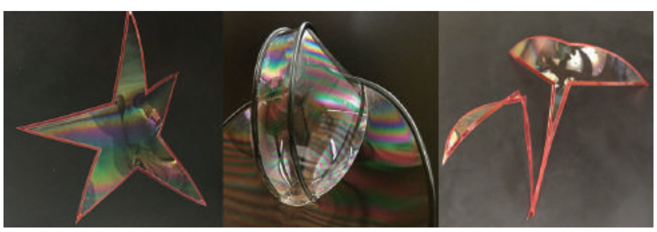

fig.1：極小曲面の例
引用元：沖縄科学技術大学院大学 HP
「シャボン玉の不思議：キルヒホッフ・プラトー問題を解く」
（URL：https://www.oist.jp/ja/news-center/news/2017/3/31/29729）

1-1. 計算手法

現在、膜構造などにおける極小曲面を計算する手法は大きく分けて 2 つ、極小曲面法と初期応力法がある。どちらにおいても閉曲線を境界面に持つ任意の初期曲面を設定する。初期曲面におけるメッシュの面積の合計が極小になるように最適化を行うのが極小曲面法 [5]。初期曲面の各ノードにおける張力が一定となるよう最適化を行うのが初期応力法である [6]。

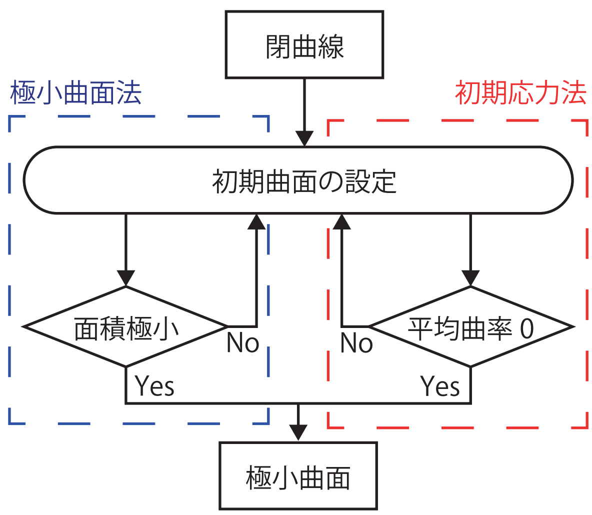

fig.2：極小曲面の計算手法

1-2. 極小曲面の生成、応用

私たちの最も身近な極小曲面はシャボン膜になるだろうが、実際に触れる。体験できるものとしては膜構造もその一例だろう。また膜構造における表面形状の理想形として極小曲面が挙げられる [3]。表面にできるしわやたるみ、過度な引張は膜構造において意匠的にも構造的にも望ましくない。一様な張力を生む極小曲面ではそれらの問題を解決することができる。

1-3. 計算から生成の流れ

極小曲面の計算は最適化によって解かれるため実際に生成する際には閉曲線部分を情報空間に入力し、そこで初期曲面を設定し最適化を行う。そして最適化された曲面を実空間で作る。この過程には情報空間と実空間の 2 つのステップが必要となる。

しかし閉曲線が、例えば木の幹や枝など複雑性が増した時に、情報空間への入力が困難となってしまう場合も考えうる。

情報空間での閉曲線の入力から極小曲面法の計算、生成の流れを実空間で再現できればより容易に極小曲面を扱える。

2. 既往研究

2-1. アスレチック

公園内にあるアスレチック。金属パイプや木材などを加工して作られた閉曲線にネットで面をかけている。

fig.3：アスレチックの例
引用元：株式会社梅島商店 HP
「アスレチックネット・アスレチックロープ」
(URL：
https://www.umeshima.net/products/athletics)

2-2. 膜構造

膜構造にしわやたるみが起こらない理想形態を生成する。しかし極小曲面は可展性がないため理想形を可展性のある形態に近似させるため厳密には極小曲面ではない [7]。

fig.4：ミュンヘン・オリンピック競技場 (1972)・フライ・オットー
引用元：dream IDEA machine
「ARCHITECTURE:Frei Paul Otto」
(URL：
http://www.dreamideamachine.com/en/)

2-3. 極小曲面編み（對馬尚・2015）[8]

多面体の閉曲線の外から内へとかぎ編みを行い、エッジ部分から等張力曲面を中心に向かって徐々に生成することで極小曲面を求められる。

この原理は多面体のみでなく、より複雑な閉曲線でも一つの閉曲線のみを境界面に持つ

この原理は多面体のみでなく、より複雑な閉曲線でも一つの閉曲線のみを境界面に持つのであれば極小曲面を求めることが可能である。

fig.5：極小曲面編みジャングルジム
引用元：Knittinbbird
「極小曲面編みジャングルジム」
(URL：
https://knittingbird.com/2016/08/26/3559/)

3. 位置づけ

(1) 極小曲面の計算手法
(2) 曲面の生成手法の容易性
(3) 閉曲線の多様性
(4) 極小曲面の計算から生成の流れの一体化

	(1)	(2)	(3)	(4)
アスレチック	×	△	×	×
膜構造	面積極小 or 応力一定	×	△	×
極小曲面編み	応力一定	○	○	○
本研究	パス長さ極小	○	○	○

本研究では極小曲面を計算する手法として、曲面のパス長さを目的関数として行う。これにより極小曲面編みでは困難な 2 つ以上の閉曲線を境界面に持つ極小曲面を生成する可能になる (fig.17)。

4. 目的

本研究の目的は極小曲面の新しい手法の証明と、計算と生成の過程を同時に行う手法の開発である。

極小曲面を計算するにあたりメッシュの面積極小、各ノードにおける応力一定を目的とし最適化が行われている。本研究では曲面のパスの合計長さに目をつけている。

モックアップ作成作成過程で紐を用い編むことで初期曲面を生成し、最後に限界まで引っ張りを加えたところ極小曲面に非常に近い形態をとった。パスを最小化することと極

極小曲面との関係性を求めることを目標とする。

fig.6：モックアップ作成 1

fig.7：モックアップ作成 2

5. 意義

従来の極小曲面生成では実空間の閉曲線を情報空間に入力、計算を行い、実空間で生成という過程をとる。本研究で仮定したパスの最小化と極小曲面の近似が示されることにより、メッシュ、ノードに加えパスを目的とした極小曲面の新しい解析手法を示せるのではないか。また、パスの最小化を実空間で紐による初期曲面の生成、引っ張りによるパスの最小化と置き換えることで極小曲面の計算と生成の過程を一体化できる。

新たな極小曲面の計算手法と、それに基づいた計算と生成の過程を同時に行うことのできる手法を開発することで、情報空間に入力が困難な複雑性の高い閉曲線、例えば自然界の木々の間などでも、極小曲面を容易に計算生成することが可能になる (fig.17)。

6. 計算手法

6-1. 初期曲面の生成

本研究での極小曲面を求めるにあたって極小曲面法（面積極小）や初期応力法（平均曲率 0）と同様に閉曲線を境界面とした初期曲面の設定を行う。

6-2. パスの最小化からの極小曲面の計算

設定した初期曲面からパスの長さの取得を行う。パスの長さの合計値が極小値になるように最適化を行い、従来の極小曲面の計算手法で生成した曲面との差を測る。編み目の数を増やしていくことで極小曲面に近似できるのか。その仮説を検証する。

6-3. 多変数関数の計算

初期曲面に設定した各ノードが変数となりパスの長さを計算する多変数関数問題になる。ここでは変数を制限し、簡易的な二次元平面のモデルでの計算結果を示す。

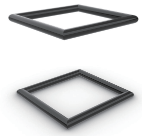

fig.8：仮定する閉曲線

２つの正方形の閉曲線が平行した状態を仮定する。
これらの閉曲線のノードをを３次元のユークリッド座標に置いて計算を行う。

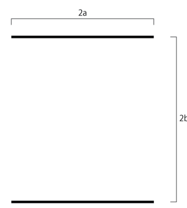

fig.9：閉曲線の長さの設定

上記の仮定したモデルを平面投影した図になる。
閉曲線の一辺の長さを 2a、閉曲線間の距離を 2b とし、この２つの閉曲線内にできるメッシュとパスの関係性を示す。

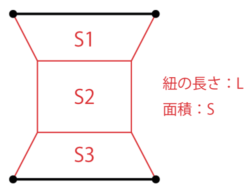

fig.10：パスの長さとメッシュ

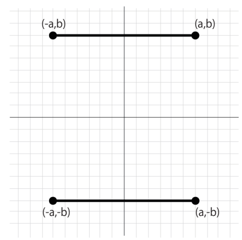

fig.11：平面グリッドに投影

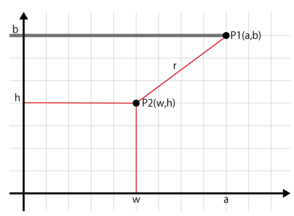

fig.11：変数の設定

X,Y 軸に対し対称性があるため第一象限での計算を行う。
閉曲線のノードを P1、変数となるノードを P2 と置き、各変数（w,h,r）を設定する。
r：P1P2 間の距離
w,h：P2 座標（h は w,r の関数）

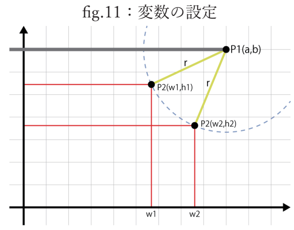

fig.12：ノードの挙動

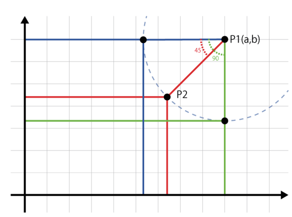

fig.13：θ の定義

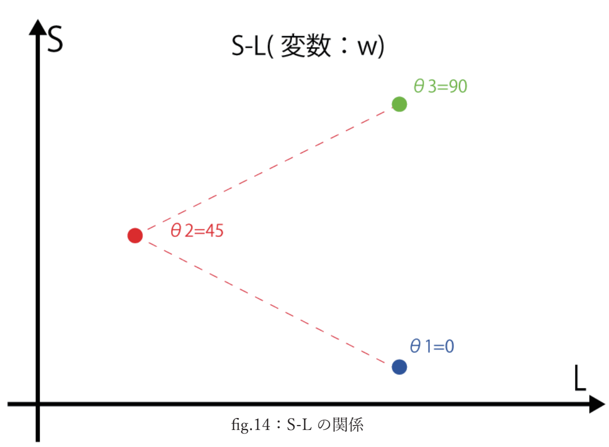

fig.14：S-L の関係

fig.14 の S-L の関係図で示したように、閉曲線から閉曲線に向かって初期曲面を編んだ状態（θ =90）から紐の長さ（L）を限界まで引っ張ると面積が極値に収束する（θ =45）のが示されている。

現在は編み目の段数 n=2 で行っているが、この数を増加させた多変数関数でも S-L の関係性を示すことで仮説を証明する。

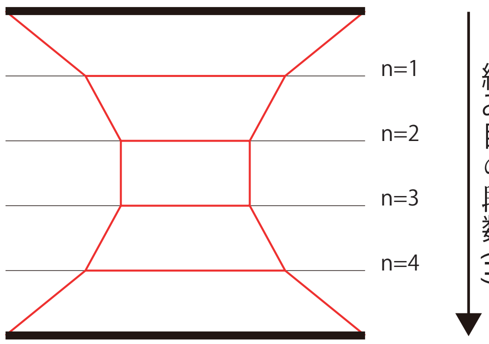

fig.15：編み目の段数（n=4）

7. 今後の展望

7-1. 多変数関数の計算

編み目の段数を増加させ、なおかつ 3 次元ユークリッド座標系でパスの最小化と、極小曲面との相関関係を証明する。

7-2. 生成方法の検討

パスの長さと極小曲面の近似を行った後、パスの最小化を行うことのできる編み方の開発を行う。
①引っかかりなく引っ張れるか
②容易に編むことができるか
等の諸条件を設定し、それらを充分に満たすような編み方を作る。

7-3. 閉曲線の入力方法の自動化

従来の極小曲面の計算では実空間の閉曲線を情報空間に入力する必要がある。そのため現在のシミュレーションも CAD 上で計算しやすい形状のみを扱わざるを得ない。

そのためより複雑性の高い閉曲線、例えば木々の幹やねじれがある形状、などの計算を行うことは困難である。

そういった問題を解決するのに、実在する複雑な閉曲線を情報空間に入力する方法を作る。樹木形状などのスキャニングから任意の閉曲線を指定し、取得する方法を目指す。

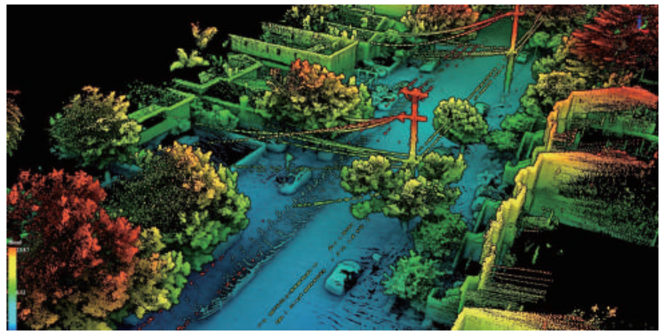

fig.16：Lidar によるスキャニング
引用元：TP ホールディングス株式会社「LiDAR360」
（URL：https://www.tphd.co.jp/products/software/lidar360/）

8. 謝意

助成金により多くの図書、材料や機器などを購入し、充分な環境を整備することができました。森泰吉郎記念研究振興基金研究助成金へ採択していただいたこと、この場を借りて厚く御礼申し上げます。

9. 参考文献

[1] 小磯深幸：曲面の変分問題 —極小曲面論入門—
（URL：https://www.jst.go.jp/crest/math/ja/suugakujuku/archive/text/3_Koiso_text.pdf）

[2] 沖縄科学技術大学院大学：シャボン玉の不思議：キルヒホッフ・プラトー問題を解く
（URL：https://www.oist.jp/ja/news-center/news/2017/3/31/29729）

[3] 石原競・八木孝憲・萩原伸幸・大森博司：極小曲面解析による膜構造の形状解析
（URL：https://www.jstage.jst.go.jp/article/aijs/60/469/60_KJ00004100032/_pdf/-char/ja）

[4] 石原競・大森博司・八木孝憲：極小曲面の数値解析法に関する研究
（URL：http://www.makukouzou.or.jp/article/pdf/1993/1993-06.pdf）

[5] 鈴木俊男・半谷裕彦：極小曲面の変数低減による有限要素解析
（URL：https://www.jstage.jst.go.jp/article/aijsx/425/0/425_KJ00004085395/_pdf）

[6] 早川健太郎・大崎純：離散的な曲面の幾何学的不変量を用いた膜構造の形状設計
（URL：https://www.jstage.jst.go.jp/article/aijs/86/783/86_772/_pdf/-char/ja）

[7] 早川健太郎・大崎純：離散的な曲面の幾何学的不変量を用いた膜構造の形状設計
（URL：https://www.jstage.jst.go.jp/article/aijs/86/783/86_772/_pdf/-char/ja）

[8] 對馬尚：極小曲面編みジャングルジム
（URL：http://knittingbird.com/2016/08/26/3559/）

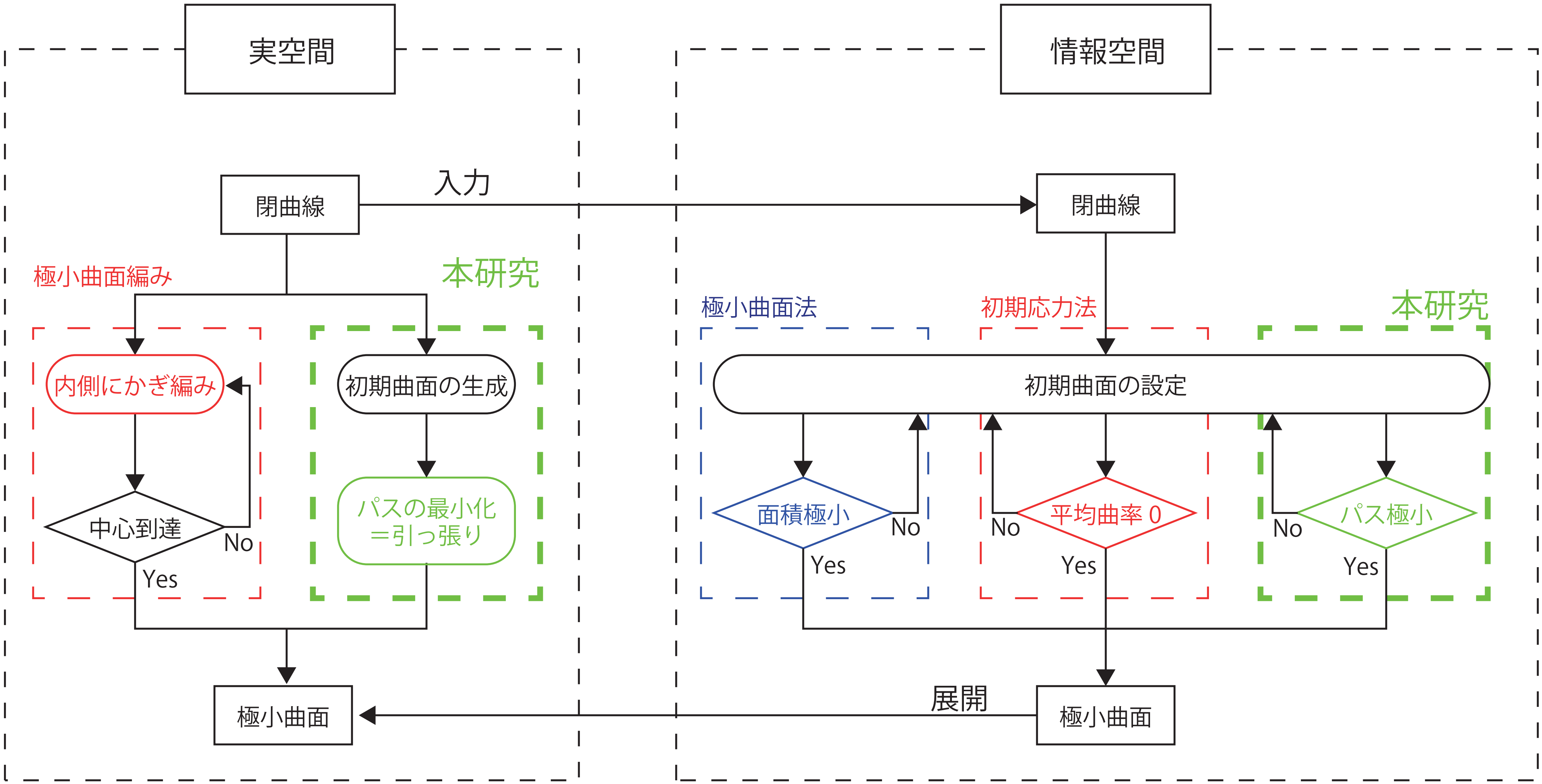

fig.17：既存の閉曲線のフローと本研究の位置づけ